



Le groupe de renormalisation dans les théories effectives chirales

T. Varin

► To cite this version:

T. Varin. Le groupe de renormalisation dans les théories effectives chirales. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2007. Français. NNT : . tel-00413271

HAL Id: tel-00413271

<https://theses.hal.science/tel-00413271>

Submitted on 3 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

N° attribué par la bibliothèque : LYCEN T

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

Diplôme de doctorat
Spécialité : Matière hadronique théorique

présentée et soutenue publiquement par T. VARIN
le 28 Septembre 2007

Le groupe de renormalisation dans les théories effectives chirales

Devant la commission d'examen formée de :

Mme. M. ERICSON (présidente)
M. J.-C. CAILLON (rapporteur)
M. A. MOLINARI (rapporteur)
M. D. DAVESNE (directeur de thèse)
M. G. CHANFRAY
M. M. URBAN

Sommaire

Résumé	5
Abstract	7
Introduction	1
1 Groupe de renormalisation	3
1.1 Introduction générale	3
1.2 Le groupe de renormalisation en physique statistique	6
1.2.1 Etude des spins de bloc de Kadanoff	7
1.2.2 Formulation générale	12
1.2.3 Utilisation du groupe de renormalisation pour l'étude des transitions de phase	14
1.3 Liens entre le GR à la Wilson et l'approche de TQC	21
1.4 Renormalisation en théorie quantique des champs	22
1.4.1 Renormalisation du lagrangien de la théorie Φ^4	23
1.4.2 Equations du groupe de renormalisation	25
1.4.3 Discussion des différents comportements asymptotiques en fonction de la forme de la fonction β	36
1.4.4 Extension au cas général où on a plusieurs constantes de couplage - linéarisation	38
1.4.5 Comptage en puissances - Renormalisabilité d'une théorie	39
2 Régularisation	43
2.1 Introduction générale - Contexte	43
2.2 Revue critique de quelques méthodes existantes	45
2.2.1 Régularisation dimensionnelle	45
2.2.2 Pauli-Villars	50
2.2.3 Le cut-off naïf	52
2.2.4 Le temps propre	52
2.3 Construction d'une nouvelle méthode de régularisation	54
2.4 Application de la méthode à quelques exemples	58
2.4.1 QED	58
2.4.2 Extension de QED à 5 dimensions	64

3	EGR pour un modèle chirale effectif	73
3.1	Une introduction à la symétrie chirale	73
3.1.1	Introduction générale	73
3.1.2	Application aux théories effectives : le modèle sigma-linéaire	76
3.2	Présentation du modèle	79
3.2.1	Construction	79
3.2.2	Phénoménologie	83
3.3	Equations du groupe de renormalisation	84
3.4	Diagramme de flux - Points fixes	90
	Conclusion	93
	A Théorème de découplage	95
	B Table des intégrales	99
C	Diagrammes à une boucle du lagrangien chirale effectif	101
C.1	Règles de Feynman	101
C.2	Contributions à une boucle aux fonctions de Green à deux points	102
	Références	108

Résumé

La production de dileptons en collisions d'ions lourds relativistes (CERN/SPS, SIS/HADES, RHIC) et le comportement des mésons vecteurs (en particulier le méson ρ) constituent un des sujets centraux de la chromodynamique quantique (QCD) dans la matière hadronique dense et chaude. Un enjeu crucial est en effet l'étude de la restauration partielle ou totale de la symétrie chirale $SU(2) \times SU(2)$, ce qui nécessite en pratique l'utilisation de théories effectives. Une des difficultés majeures est de construire une telle théorie qui, s'appuyant sur des contraintes phénoménologiques bien établies à basse température et/ou densité, permette d'obtenir des prédictions lorsque l'on se rapproche de la transition de phase.

Le modèle qui a été utilisé (développé par M. Urban) est basé sur l'idée du modèle sigma linéaire jaugé (mésons ρ et a_1) mais adapté de façon très détaillée à la phénoménologie en ne gardant que de façon approximative la symétrie locale. Une partie importante de ce travail a consisté à régulariser la théorie, c'est-à-dire à s'affranchir des divergences qui apparaissent dans les calculs à une boucle. Nous avons donc été amenés à introduire une nouvelle prescription de coupure des intégrales qui fasse apparaître explicitement un cut-off tout en respectant les symétries des modèles étudiés. Afin de tester la validité de cette méthode, nous l'avons appliquée à QED en 4 et 5 dimensions. Pour finir, nous avons établi les équations du groupe de renormalisation dans notre modèle chiral particulier et avons montré que même si la manifestation vectorielle introduite récemment dans la littérature était compatible avec nos équations, la restauration "traditionnelle" à la Ginzburg-Landau était plus probable.

Abstract

The dilepton production within the heavy ions collisions (CERN/SPS, SIS/HADES, RHIC) and the behaviour of vector mesons (in particular the rho meson) are among the main topics of quantum chromodynamics (QCD) in hadronic matter. One of the main goals is the study of partial or total restoration of chiral symmetry $SU(2) \times SU(2)$, for which effective theories need to be used. One of the important difficulties is to build a theory which allows to obtain predictions when approaching the phase transition by taking into account the phenomenological constraints at low temperature and/or density.

The model used here (developed by M. Urban) is based on the gauged (rho and ω mesons) linear sigma model adjusted (in practice the local symmetry is only approximate) to reproduce the phenomenology very well. The first part of this thesis consists in presenting a new cut-off based regularization scheme preserving symmetry requirements. The motivation of such a method is a correct accounting of quadratic and logarithmic divergences in view of their intensive use for the renormalisation group equations. For illustrative purposes we have applied it to QED in 4 and 5 dimensions. The second part of this work is devoted to the derivation of the RGE and their resolution. In particular, we show that both restorations (traditional and vector manifestation) can be obtained from our equations, but the most likely remains the “traditional” Ginzburg-Landau scenario.

Introduction générale

Ce travail a été effectué au sein du groupe de physique théorique de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon sous la direction de Dany Davesne. Les principales thématiques développées dans ce groupe sont la phénoménologie du modèle standard, la physique mathématique, le développement de théories microscopiques des noyaux, l'étude du rayonnement de canalisation dans les solides ou encore la matière hadronique. C'est dans ce dernier registre, et plus précisément dans la problématique générale de l'étude de la restauration de la symétrie chirale que se situe mon travail.

L'étude de la matière hadronique dans des conditions extrêmes de température et de densité telle qu'elle peut être produite par exemple dans les collisions d'ions lourds ultra-relativistes actuellement au CERN et à RHIC, ou dans un avenir proche grâce aux futurs collisionneurs LHC et ILC, s'avère être un domaine de physique particulièrement riche dans le sens où les outils dont on dispose actuellement en physique nucléaire ou physique des particules, à savoir la chromodynamique quantique (QCD), sont "inutilisables" au niveau du monde hadronique.

Un des enjeux essentiels de la physique nucléaire des hautes énergies actuelle est de décrire le diagramme de phase de QCD et donc par exemple de comprendre et caractériser les transitions de phase que subit la matière de quarks et de gluons. Parmi toutes les possibilités qui existent, deux sont particulièrement importantes : le déconfinement et la transition de phase chirale. De nombreuses avancées ont été réalisées dans ce domaine grâce au développement des ordinateurs, *via* la QCD sur réseaux. Mais il existe un autre angle d'attaque qui est l'étude de la matière hadronique (où la symétrie chirale joue un rôle central) dont une bonne connaissance peut s'avérer être un outil précieux pour obtenir des informations - au moins indirectes - sur la QCD. Il est par exemple possible d'interpréter certains spectres expérimentaux comme des effets précurseurs de restauration de symétrie chirale : citons par exemple les spectres de dileptons au CERN (*via* le mélange axial-vecteur à température finie).

Dans cette thèse, nous nous placerons au niveau des théories effectives chirales et plus précisément celles qui incluent les mésons vectoriels ρ et a_1 en plus des scalaires π et σ déjà

présents dans le modèle σ -linéaire. Afin d'obtenir des prédictions sur la manière dont va s'opérer la restauration de la symétrie chirale avec de telles théories, nous devons utiliser une méthode qui nous permette de connaître le comportement de notre modèle dans un grand intervalle énergétique : le groupe de renormalisation.

Le manuscrit est découpé en trois parties. La première est un ensemble de rappels généraux sur la renormalisation et le groupe de renormalisation aussi bien en physique statistique, où le formalisme est plus simple et plus intuitif, qu'en théorie quantique des champs. Une différence fondamentale entre ces deux approches est que lorsque nous allons réaliser des calculs en boucles en théorie des champs certaines contributions seront divergentes (il n'y a pas de cut-off naturel comme le pas du réseau en physique statistique). La deuxième partie portera sur une revue critique des différentes méthodes existantes permettant de traiter ces divergences ainsi que sur la présentation d'une nouvelle méthode de régularisation avec cut-off qui respecte les symétries. Nous appliquerons ensuite cette méthode à plusieurs exemples afin de montrer sa validité. Enfin, la troisième partie sera consacrée à l'étude de la restauration de la symétrie chirale dans un modèle effectif particulier qui reproduit parfaitement la phénoménologie aux basses énergies. Nous verrons alors que pour ce modèle, deux scénarios de restauration sont *a priori* possibles, la restauration à la Ginzburg-Landau ainsi que la manifestation vectorielle.

Chapitre 1

Groupe de renormalisation

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les idées générales et le formalisme du groupe de renormalisation. Notre approche sera dans un premier temps historique : nous verrons comment la renormalisation a aidé au développement de la théorie quantique des champs, puis comment la perception de cette méthode a évolué dans l'histoire de la physique des particules. Ensuite, nous appliquerons sur un exemple simple issu de la physique statistique les outils du groupe de renormalisation. Pour finir, nous nous placerons dans le cadre de la théorie quantique des champs et nous développerons les outils et le formalisme nécessaires à la suite de notre étude qui porte sur des modèles effectifs chiraux et les phénomènes critiques associés.

1.1 Introduction générale

La théorie quantique des champs est aujourd'hui le cadre théorique utilisé pour décrire la physique des particules. Elle est apparue au début des années 1930, afin de résoudre le problème de la description de l'interaction entre des particules chargées avec un champ électromagnétique. De manière générale, toutes les théories de champs en interaction ont une propriété en commun : les interactions entre les particules sont locales, c'est-à-dire se produisent en un seul point d'espace-temps. Cependant, très vite, les physiciens se sont heurtés à des problèmes dès lors qu'ils ont essayé de faire des calculs perturbatifs : la physique des courtes distances diverge à cause de cette localité. En effet, lors de ces calculs, des divergences apparaissent et les tentatives pour les éliminer se sont d'abord soldées par des échecs. Avant guerre, les principaux physiciens qui ont développé la mécanique quantique (Bohr, Pauli, Heisenberg, Dirac...) étaient d'ailleurs pessimistes quand à la résolution de ce problème et s'attendaient à ce qu'une autre révolution conceptuelle permette de s'affranchir du problème des divergences.

Ce n'est qu'après la seconde guerre mondiale que d'importants développements théoriques ont permis de progresser dans la résolution du problème ; ces développements furent réalisés suite à de nouvelles données expérimentales : la découverte par Lamb et Rutherford [1] de la structure fine de l'hydrogène (1947), ainsi que la mise en évidence par Nafe, Nelson et

Rabi [2] de la structure hyperfine de l'hydrogène et du deutérium (1947). C'est la théorie de la renormalisation qui a permis dans les années 1947-50 de résoudre le problème des infinis et de redonner confiance à la communauté dans la théorie quantique des champs. En établissant un formalisme qui permette d'éliminer les divergences au plus bas ordre de la théorie des perturbations - de manière consistante avec les symétries de Lorentz et de jauge, Schwinger [3, 4] fut le premier à rétablir la légitimité de la théorie quantique des champs. Il nota alors que les termes provenant des contributions en boucles pouvaient être interprétés comme des modifications des masses et des constantes de couplage apparaissant dans le lagrangien initial. Plus important encore, ses calculs permettent alors de reproduire les données expérimentales sur le moment magnétique de l'électron et le Lamb shift.

A la suite des travaux de Schwinger, Feynman développa une méthode qui permettait la représentation des processus fondamentaux en termes de trajectoires des particules dans l'espace-temps [5, 6] (diagrammes de Feynman). Dyson [7] montra alors que les résultats de Feynman étaient parfaitement compatibles avec la description de Schwinger et Tomonaga de QED. Dyson [8] fut de plus capable de prouver que la renormalisation de la masse et de la charge de QED permettaient de s'affranchir des divergences à tous les ordres de la théorie des perturbations et que QED était consistante avec la renormalisation. Par contre, il fallut attendre les années 1960 avec les travaux de Weinberg, Mills, Yang, Bogolioubov et d'autres avant de prouver la renormalisabilité de QED de manière rigoureuse. La renormalisabilité d'une théorie est alors devenue un critère de sélection et seules les théories quantiques des champs renormalisables furent adoptées afin de décrire la physique des particules élémentaires. Les divergences, qui furent longtemps considérées comme invalidant une théorie sont élevées en principe de sélection pour les modèles. Les avancées impressionnantes des années 1960-1970 qui culminèrent avec la mise en place du modèle standard consacrèrent le triomphe de la renormalisation. Lors de la conférence de Stockholm de 1979 au cours de laquelle Weinberg reçut son prix nobel, ce dernier déclara :

To a remarkable degree, our present detailed theories of elementary particles interactions can be understood deductively, as consequences of symmetry principles and of the principle of renormalisability which is invoked to deal with the infinities.

Lorsque la renormalisation fut développée, elle était un outil grâce auquel on pouvait s'affranchir des infinis apparaissant dans les calculs perturbatifs. Au début des années 1970, les travaux de Kenneth Wilson [9] en matière condensée permettent de franchir un nouveau pas en mettant en évidence le fait que la renormalisation n'est pas juste un outil technique, mais que c'est "une expression de la variation de la structure des interactions physiques sous un changement d'échelle des phénomènes étudiés". Ici l'échelle de la théorie est la valeur de l'énergie au-delà de laquelle la théorie considérée ne reproduit pas la physique de manière satisfaisante. Par exemple, QED peut être considérée comme une théorie effective d'une théorie à plus haute énergie qui contiendra les bosons W^\pm et Z^0 . Wilson constata que si on considère l'évolution des paramètres de la théorie sous un changement d'échelle, on peut ainsi déterminer l'évolution des constantes de couplage de cette dernière : c'est la naissance du groupe de renormalisation. De plus, dans ces théories, si on appelle Λ

le cut-off (ou échelle de coupure) et E l'énergie des processus considérés, les termes non renormalisables sont supprimés en puissances de E/Λ que l'on peut négliger aux faibles énergies. Comme le dit Weinberg [10] :

Thus the only interactions that we can detect at ordinary energies are those that are renormalizable in the usual sense, plus any nonrenormalizable interactions that produce effects which although tiny, are somehow exotic enough to be seen.

Il est important de préciser que les descriptions permises par les théories effectives ne sont pas exactes, mais valides à un certain degré d'approximation, d'autant meilleur qu'on se situe loin de la nouvelle physique. Dans le cadre des théories effectives, plutôt que de se demander si une théorie est renormalisable ou non, on pourra se demander comment faire pour la renormaliser, ou si les termes non renormalisables vont beaucoup contribuer ou pas. La renormalisabilité d'une théorie dépend alors de l'énergie à laquelle on souhaite se placer [11].

Un autre point important à noter à propos des théories effectives est qu'il n'est pas forcément nécessaire de connaître la théorie aux hautes énergies pour construire notre théorie effective ; notre ignorance des phénomènes aux hautes énergies est cachée par l'introduction d'une échelle à laquelle on s'attend à voir l'apparition de cette nouvelle physique. Les paramètres du lagrangien effectif ne pouvant donc pas être déduits de la théorie supérieure, ils sont fixés par les données expérimentales. Cette description est permise par le fait que les phénomènes physiques apparaissant à des énergies très différentes sont en général très peu corrélés ; comme le notait Wilson [12] :

In general, events distinguished by a great disparity in size have little influence on one another ; they do not communicate, and so the phenomena associated which each scale can be treated independently.

Ceci correspond au théorème de découplage d'Appelquist et Carrazzone en théorie des champs [13]. Il existe cependant des exceptions à cette règle, comme par exemple les comportements près des points critiques. A l'extrême, on peut même construire une nouvelle théorie à chaque fois que les énergies considérées permettent de produire une nouvelle particule. La connexion entre les paramètres des deux théories de part et d'autre de l'échelle de raccordement est déterminée de manière à ce que la physique soit la même à la limite entre les deux théories. Ces conditions de raccordement sont calculées avec l'échelle de raccordement égale à la masse de la particule la plus lourde [14]. D'un point de vue pratique, nous pouvons considérer la situation de deux manières différentes. La première part des hautes énergies. Supposons que nous connaissions la théorie permettant de décrire la physique à des énergies infiniment grandes ; nous pourrions alors déterminer la théorie effective du domaine qui nous intéresse en intégrant petit à petit les modes lourds. De cette manière, nous obtiendrions des interactions non renormalisables, avec de moins en moins de particules. Comme nous l'avons vu précédemment, la théorie obtenue resterait approximativement renormalisable, étant donné que les interactions non renormalisables

sont supprimées par des puissances négatives du cut-off.

La seconde méthode est celle adoptée par la majorité des physiciens ; on ne connaît pas la théorie aux hautes énergies mais on dispose d'une théorie effective à laquelle on va rajouter des degrés de liberté dès lors que ceux-ci sont produits aux énergies considérées. Dans cette vision, on n'a pas besoin de connaître la théorie des énergies infiniment grandes, ni même de savoir si cette dernière existe. Pour citer une dernière fois Weinberg [15] :

Any theory that satisfies the axiom of S-matrix theory, and contains only a finite number of particles which mass below some M , will at energy below M look like a quantum field theory involving just those particles.

Malheureusement, bien que l'idée générale soit relativement simple, les calculs sont souvent très techniques et rendent le sujet difficile à appréhender, surtout en théorie quantique des champs. C'est pourquoi nous aborderons les idées générales dans le cadre de la physique statistique (plus proche des travaux de Wilson dans l'esprit), avant de passer à la théorie quantique des champs.

1.2 Le groupe de renormalisation en physique statistique

Une caractéristique commune à tous les systèmes de matière condensée est qu'ils contiennent un grand nombre de constituants (atomes, électrons...) dès que nous nous plaçons au niveau macroscopique. Sachant que la majorité des problèmes physiques pour lesquels nous connaissons des solutions exactes sont des systèmes comportant peu de degrés de liberté, il va nous falloir trouver un moyen de faire des simplifications importantes. L'idée est de choisir un échantillon représentatif du système pour faire les calculs. La question que nous pouvons alors nous poser est dans quelle mesure réduire la taille d'un système tout en conservant une bonne description des propriétés de ce dernier. Pour répondre à cette question, nous allons essayer de déterminer une "longueur de corrélation ξ ", qui sera par définition la taille minimale à laquelle nous pouvons restreindre notre étude sans changer qualitativement les propriétés du système. L'étude du système pourra alors se limiter à une distance de l'ordre de la longueur de corrélation.

Les études menées avec le groupe de renormalisation sur les phénomènes critiques suggèrent alors que les systèmes vont avoir un comportement particulier près de la transition de phase ; effectivement, la longueur de corrélation ξ va augmenter (et même diverger dans le cas d'une transition du second ordre) près de la transition. Or nous pouvons montrer que le comportement d'un système ne contenant que peu de degrés de liberté par longueur de corrélation sera qualitativement différent de celui d'un système où nous avons un grand nombre de degrés de liberté. Ceci est assez surprenant, car les systèmes sont décrits en termes de hamiltoniens et nous pourrions nous attendre à ce que le système dépende en

priorité de la nature des termes d'interaction et de la valeur des constantes de couplage correspondantes. C'est vrai dans le cas où la longueur de corrélation est faible, mais dans le cas où nous avons une grande longueur de corrélation, nous observons des comportements collectifs des degrés de liberté et ce sont en réalité ces derniers qui gouvernent l'évolution du système. Dans ce cas, le hamiltonien ne joue alors plus qu'un rôle secondaire. Ceci est à l'origine de ce qu'on appelle les classes d'universalité, c'est-à-dire que différents systèmes, caractérisés par des hamiltoniens différents, se comportent de la même manière au voisinage de la transition de phase. L'idée d'universalité peut même être formulée de manière plus générale pour relier les comportements critiques de systèmes comprenant des interactions de nature différente.

1.2.1 Etude des spins de bloc de Kadanoff

Le but de cette partie sera d'expliciter sur un exemple la manière dont nous pouvons écrire une transformation du groupe de renormalisation et comment un système va se comporter sous celle-ci. Considérons pour cela un système de spins sur un réseau triangulaire en dimension deux, avec une distance a entre les différents sites et décrit par un hamiltonien d'Ising dont la forme est (le facteur $\beta = 1/k_B T$ est inclus) :

$$\mathcal{H}\{\sigma\} = K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \quad (1.1)$$

où la notation $\langle \rangle$ signifie que nous prenons la somme sur les paires de plus proches voisins ; nous donnons aussi un schéma du réseau :

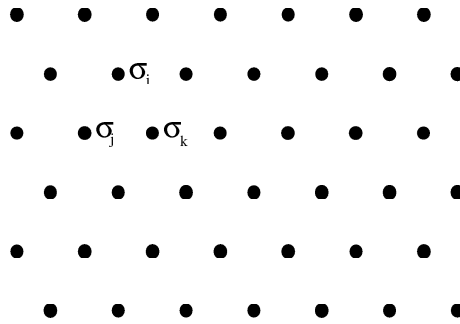


FIG. 1.1 – Réseau triangulaire bidimensionnel contenant des spins en interaction.

Ici, afin d'établir la transformation du groupe de renormalisation (le changement d'échelle), nous regroupons les spins par groupes de trois. Nous formons ainsi un nouveau spin "effectif", ou spin de bloc, dont la valeur est :

$$S_I = \text{signe} \{ \sigma_1^I + \sigma_2^I + \sigma_3^I \}$$

Cette prescription est appelée règle de majorité. Une fois cette transformation réalisée sur notre système, nous aurons un nouvel hamiltonien effectif \mathcal{H}' dont l'expression se déduira de celle de \mathcal{H} par :

$$e^{\mathcal{H}'\{S_I\}} = \sum_{\{\sigma_I\}} e^{\mathcal{H}\{S_I, \sigma_I\}} \quad (1.2)$$

où $\{S_I\}$ est l'ensemble des configurations possibles des spins contenus dans chaque bloc I . Ceci revient donc à réaliser une trace partielle sur les degrés de liberté dont nous voulons nous affranchir au cours de la transformation. Le réseau initial va alors se transformer suivant :

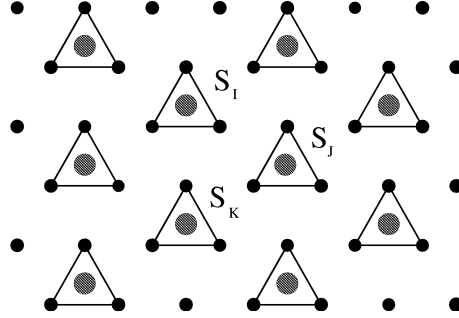


FIG. 1.2 – Réseau triangulaire 2D sur lequel nous avons représenté les spins de bloc. Nous pouvons noter qu'à une rotation $(\pi/6)$ et un facteur de dilatation $(\sqrt{3})$ près, nous retrouvons le même réseau qu'initialement.

Nous allons maintenant déterminer explicitement la forme de \mathcal{H}' . Nous pourrons ainsi en déduire la manière dont évoluent les constantes de couplage sous une transformation du groupe de renormalisation. Pour ceci, commençons par décomposer le hamiltonien en deux parties :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \quad (1.3)$$

où \mathcal{H}_0 est le “hamiltonien libre” contenant les interactions à l'intérieur d'un même bloc, alors que V est le potentiel d'interaction entre des blocs de spin différents, soit explicitement :

$$\mathcal{H}_0 = K \sum_I \sum_{i,j \in I} \sigma_i^I \sigma_j^I + h \sum_I \sum_{i \in I} \sigma_i^I \quad (1.4)$$

$$V = K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} \sigma_i^I \sigma_j^J \quad (1.5)$$

Dans un premier temps, nous allons calculer la fonction de partition associée au hamiltonien libre, avant de faire de même pour la partie potentielle. De plus, V ne pouvant pas être déterminé de manière exacte, nous allons supposer que ce terme est petit afin de pouvoir appliquer la théorie des perturbations. Nous commençons donc par reformuler l'équation

(1.2) en introduisant l'expression de la valeur moyenne d'une quantité A définie par rapport à \mathcal{H}_0 :

$$\langle A(S_i) \rangle_0 \equiv \frac{\sum_{\{\sigma_I\}} e^{\mathcal{H}_0\{S_I, \sigma_I\}} A(S_I, \sigma_I)}{\sum_{\{\sigma_I\}} e^{\mathcal{H}_0\{S_I, \sigma_I\}}} \quad (1.6)$$

Le hamiltonien se réexprime alors suivant :

$$e^{\mathcal{H}'\{S_I\}} = \langle e^V \rangle_0 \sum_{\{\sigma_I\}} e^{\mathcal{H}_0\{S_I, \sigma_I\}} \quad (1.7)$$

Pour un spin de bloc avec une valeur S_I donnée, nous sommes sur les quatre configurations $\{\sigma_I\}$ pour obtenir la fonction $z_0(S_I)$:

$$z_0(S_I) = \exp\{3K + 3hS_I\} + 3 \exp\{-K + hS_I\} \quad (1.8)$$

Le problème de l'expression du hamiltonien des spins de bloc donné en (1.2) est donc ramené au problème de l'évaluation de la valeur moyenne du potentiel V :

$$e^{\mathcal{H}'\{S_I\}} = \langle e^V \rangle_0 \prod_{S_I} z_0(S_I) \equiv \langle e^V \rangle_0 Z_0(K) \quad (1.9)$$

où Z_0 est la fonction de partition des spins de bloc sans les interactions. Comme indiqué précédemment nous allons procéder de manière perturbative. Pour ce faire, nous utilisons la méthode dite des cumulants, qui nous permet d'écrire :

$$\langle e^V \rangle_0 = \exp \left\{ \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2} [\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2] + \mathcal{O}(V^3) \right\} \quad (1.10)$$

L'équation (1.9) se réécrit donc suivant :

$$\mathcal{H}'\{S_I\} = \log Z_0(K) + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2} [\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2] + \mathcal{O}(V^3) \quad (1.11)$$

Nous allons maintenant nous placer au premier ordre du développement en V afin d'évaluer la valeur moyenne de ce potentiel. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_0 &= \langle K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} \sigma_i^I \sigma_j^J \rangle_0 \\ &= K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} \langle \sigma_i^I \rangle_0 \langle \sigma_j^J \rangle_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

où nous avons pu factoriser cette expression car les spins σ_i^I (spin i du bloc I) et σ_j^J n'appartiennent pas au même bloc et sont donc indépendants. Nous en déduisons alors la valeur moyenne σ_i^I d'un spin i avec une valeur du spin de bloc S_I fixée :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i^I \rangle_0 &= \frac{\sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i^I e^{\mathcal{H}_0}}{\sum_{\{\sigma_i\}} e^{\mathcal{H}_0}} \\ &= \frac{1}{z_0(S_I)} \sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i^I e^{\mathcal{H}_0} \\ &\equiv \frac{x_0(S_I)}{z_0(S_I)} S_I \end{aligned} \quad (1.13)$$

où nous avons introduit :

$$x_0(S_I) = \exp\{3K + 3hS_I\} + \exp\{-K + hS_I\} \quad (1.14)$$

Notons que nous pouvons réécrire $\langle \sigma_i^I \rangle_0$ sous la forme $\alpha_1 S_I + \alpha_2$ avec :

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 = \frac{x_0(\pm 1)}{z_0(\pm 1)} = \frac{e^{\pm 3H+3K} + e^{\pm H-K}}{e^{\pm 3H+3K} + 3e^{\pm H-K}} \quad (1.15)$$

Pour réinjecter ces résultats dans l'expression du hamiltonien \mathcal{H}' , nous définissons pour finir :

$$z_0(1)z_0(-1) \equiv z_H^2 \quad (1.16)$$

$$z_0(1) \equiv z_0(-1)e^{2h'_0} \quad (1.17)$$

soit

$$z_0(1) = z_H e^{h'_0} \quad (1.18)$$

$$z_0(-1) = z_H e^{-h'_0} \quad (1.19)$$

Ce qui nous permet de réécrire \mathcal{H}' sous la forme :

$$\mathcal{H}'\{S_I\} = \frac{N}{3} \log z_H + \sum_I h'_0 S_I + 2K \sum_{\langle IJ \rangle} (\alpha_1 S_I + \alpha_2)(\alpha_1 S_J + \alpha_2) \quad (1.20)$$

En comparant cette expression avec (1.1), les nouvelles constantes de couplage s'écrivent :

$$K' = 2K\alpha_1^2 \quad (1.21)$$

$$h' = h'_0 + 12K\alpha_1\alpha_2 \quad (1.22)$$

Nous avons finalement atteint notre objectif initial qui était de voir comment des transformations du groupe de renormalisation agissent sur les constantes de couplage de notre système.

Nous allons maintenant discuter ces équations pour voir quels sont les points fixes, c'est-à-dire les points invariants sous des transformations du groupe de renormalisation, et comment celles-ci permettent d'obtenir les diagrammes de flux¹ pour notre système. Pour commencer, plaçons nous dans le cas où le champ magnétique est nul. Nous aurons :

$$K' = 2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right) \quad (1.23)$$

Nous pouvons alors examiner deux cas limites :

¹Les diagrammes de flux permettent de visualiser le comportement des constantes de couplage du système sous des variations d'échelle (ici on modifie le pas du réseau) et nous apportent des informations sur les différentes phases sous lesquelles nous pourrions trouver le système.

1. K grand (ou de manière équivalente $T \propto 1/K$ petite). Dans ce cas la relation de récurrence se simplifie en $K' = 2K$. K augmente donc à chaque itération et tend vers l'infini.
2. K petit (ou T grande). Nous aurons alors $K' = K/2$ ce qui signifie que la constante de couplage diminue à chaque itération pour tendre vers 0.

De plus, il existe un point fixe² K^* qui est solution de :

$$K^* = 2K^* \left(\frac{e^{3K^*} + e^{-K^*}}{e^{3K^*} + 3e^{-K^*}} \right) \quad (1.24)$$

Nous trouvons alors $K^* = 1/4 \log(1 + 2\sqrt{2}) \simeq 0,336$. En traçant le diagramme de flux correspondant, nous observons que K^* est un point fixe instable, qui signale une transition de phase du second ordre entre les deux bassins d'attraction des points fixes stables $K = 0$ et $K = \infty$.

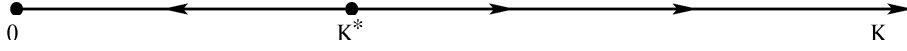


FIG. 1.3 – Diagramme de flux à une dimension (sans champ magnétique externe) issu du hamiltonien \mathcal{H} . Les flèches sont dirigées de l'ultraviolet vers l'infrarouge.

Les deux points fixes stables correspondent au cas où le système est ordonné ($K = \infty$) ou très désordonné ($K = 0$). En présence d'un champ magnétique externe, le diagramme de flux se généralise en deux dimensions suivant :

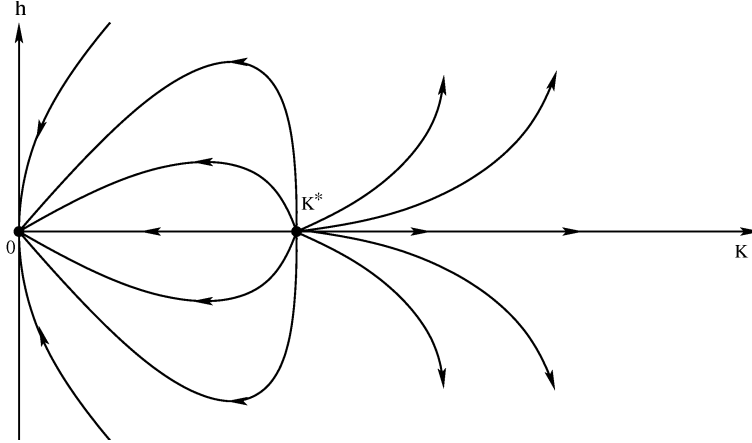


FIG. 1.4 – Diagramme de flux à deux dimensions (avec un champ magnétique externe h) issu du hamiltonien \mathcal{H} . Les flèches sont dirigées de l'ultraviolet vers l'infrarouge.

²Une transformation du groupe de renormalisation correspond à un changement d'échelle. Un point fixe traduit donc une invariance d'échelle et signale par conséquent la présence d'une transition de phase.

Les points fixes sont les mêmes que précédemment, ce qui n'est pas vrai dans le cas général où nous pouvons voir l'apparition de nouveaux points fixes (ici en $h \neq 0$). De manière générale, le remplacement des spins initiaux par les spins de bloc impliquent une perte d'information qui peut se traduire par l'apparition de constantes de couplage supplémentaires dans le hamiltonien ; ceux-ci n'apparaissent pas explicitement dans notre calcul, mais ils pourraient être inclus dans ce dernier si nous prenions des termes d'ordre supérieur dans le développement en cumulants. Après une infinité de transformations du groupe de renormalisation, le hamiltonien peut ainsi contenir une infinité de constantes de couplage qui correspondent à l'ensemble des couplages autorisés par les symétries du modèle.

1.2.2 Formulation générale

Si nous considérons un système de spins séparés par une distance a et que nous appliquons une transformation du groupe de renormalisation, la distance entre les nouveaux degrés de liberté deviendra la où l est appelé facteur d'échelle. Si nous procédons ensuite à une redéfinition d'échelle telle que, dans les nouvelles unités, les blocs de spins se retrouvent de nouveau séparés par une distance a , le réseau paraîtra identique à celui de départ, mais avec un hamiltonien différent.

Nous considérons des systèmes décrits par des hamiltoniens que nous pouvons écrire de manière générale sous la forme :

$$\mathcal{H} = \sum_n K_n \theta_n[\{S\}] \quad (1.25)$$

où les K_n sont les constantes de couplage et $\theta_n[\{S\}]$ les opérateurs qui sont des fonctionnelles des degrés de liberté $\{S\}$.

Regardons alors comment notre hamiltonien de départ va se transformer en hamiltonien effectif sous une transformation du groupe de renormalisation R_l . Supposons que l'ensemble des constantes de couplage $\mathbf{K} \equiv [K]$ se transforment comme :

$$[K'] \equiv R_l[K] , \quad l > 1 \quad (1.26)$$

Cette équation décrit l'évolution des constantes de couplage sous une transformation du groupe de renormalisation ; de manière générale, R_l est une transformation non linéaire dont l'expression explicite peut être très complexe³.

³Notons que nous pouvons formuler les équations du groupe de renormalisation sous forme différentielle [16] ; si nous partons d'un système dont le pas du réseau est a et que nous formons des blocs de taille la , nous formerons des blocs de taille sla par s itérations successives, avec :

$$[K_{sl}] = R_s[K_l] \quad (1.27)$$

En choisissant $s = 1 + \epsilon$, nous pouvons réécrire (1.27) sous forme différentielle :

$$\frac{d[K_l]}{dl} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[K_{(1+\epsilon)l}] - [K_l]}{\epsilon l} \quad (1.28)$$

Par ailleurs, pour un problème donné, nous n'avons pas unicité de la transformation, car nous pouvons grouper les degrés de liberté de différentes manières. Le but sera donc de trouver la transformation qui permette de réaliser les calculs les plus simples. Commençons donc par rappeler la définition de la fonction de partition pour un système comprenant N spins :

$$Z_N[K] = Tr e^{\mathcal{H}} \quad (1.31)$$

Nous savons que toute transformation du groupe de renormalisation consiste à réduire le nombre de degrés de liberté d'un facteur l^d (où d est la dimension du réseau) et de passer ainsi des variables initiales $\{\sigma_i\}$, $i = 1 \dots N$, aux variables de bloc $\{S_I\}$, $I = 1 \dots N/l^d$. Il faut alors trouver un moyen de réexprimer l'action en fonction des nouveaux degrés de liberté. Ceci est réalisé en introduisant un projecteur $P(\sigma_i, S_I)$ - qui va agir comme une trace partielle - de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{H}'_N\{[K'], S_I\}} &= Tr'_{\{\sigma_i\}} e^{\mathcal{H}_N\{[K], \sigma_i\}} \\ &= Tr_{\{\sigma_i\}} P(\sigma_i, S_I) e^{\mathcal{H}_N\{[K], \sigma_i\}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

où le membre de droite se réexprime suivant :

$$\frac{1}{l} \frac{\partial R_s[K_l]}{\partial s} \equiv \frac{1}{l} B[K_l] \quad (1.29)$$

Ceci définit la transformation non linéaire $B[K_l]$. Les relations de récurrence peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\frac{d[K_\tau]}{d\tau} = B[K_\tau] \quad (1.30)$$

avec $\tau \equiv \log l$. Les points fixes sont alors solution de $B[K^*] = 0$. Cette formulation présente l'avantage d'être très proche du formalisme utilisé en théorie des champs, comme nous le verrons par la suite.

De plus, nous imposerons au projecteur de vérifier les trois propriétés suivantes⁴ :

$$(i) \ P(S_i, S'_I) \geq 0 \quad (1.36)$$

$$(ii) \ P(S_i, S'_I) \text{ préserve les symétries du système} \quad (1.37)$$

$$(iii) \ \sum_{\{S'_I\}} P(S_i, S'_I) = 1 \quad (1.38)$$

Ces conditions nous permettent alors de montrer qu'une transformation du groupe de renormalisation n'est qu'une réécriture de la même fonction de partition en fonction de nouveaux degrés de liberté. La physique contenue à chaque transformation est donc la même ; seuls changent les degrés de liberté qui seront choisis tels qu'ils décrivent la physique sur des échelles pertinentes vis à vis des phénomènes que nous souhaitons étudier. Dans le cas de la théorie quantique des champs, où nous conserverons les mêmes degrés de liberté au cours des transformations, ces dernières permettront de changer l'échelle à laquelle nous considérons la théorie. Comme nous l'avons déjà dit, nous allons utiliser le groupe de renormalisation afin d'étudier les transitions de phase qui apparaissent dans les systèmes.

1.2.3 Utilisation du groupe de renormalisation pour l'étude des transitions de phase

L'origine des singularités

Une caractéristique remarquable du groupe de renormalisation est qu'une suite de transformations analytiques puisse donner naissance à des comportements qui présentent des

⁴Nous allons discuter ici les différentes propriétés imposées sur les projecteurs. La première assure que $e^{\mathcal{H}'_N\{[K'], S'_I\}} = P(S'_I, S_I) e^{\mathcal{H}_N\{[K], S_I\}} \geq 0$; la seconde implique le respect des symétries du modèle. En effet, si nous considérons le hamiltonien :

$$\mathcal{H}_N = NK_0 + h \sum_i S_i + K_1 \sum_{ij} S_i S_j + K_2 \sum_{ijk} S_i S_j S_k + \dots \quad (1.33)$$

où tous les couplages compatibles avec les symétries ont été introduits, alors il va se transformer comme :

$$\mathcal{H}'_{N'} = N'K'_0 + h' \sum_I S'_I + K'_1 \sum_{I,J} S'_I S'_J + K'_2 \sum_{I,J,K} S'_I S'_J S'_K + \dots \quad (1.34)$$

C'est-à-dire que \mathcal{H}' a la même forme que le hamiltonien de départ, alors que les couplages et les paramètres ont été modifiés. Par exemple, un modèle où nous avons des interactions de portée infinie mais sans couplage à trois spins sera de la forme (1.33) avec $K_2 = 0$, alors que l'interaction à trois spins pourra être présente dans $\mathcal{H}'_{N'}$. Pour finir, la troisième condition imposée sur les projecteurs implique :

$$\begin{aligned} Z_{N'}[K'] &\equiv \text{Tr}_{\{S'_I\}} e^{\mathcal{H}'_{N'}\{[K'], S'_I\}} \\ &= \text{Tr}_{\{S'_I\}} \text{Tr}_{\{S_I\}} P(S_i, S'_I) e^{\mathcal{H}_N\{[K], S_i\}} \\ &= \text{Tr}_{\{S_i\}} e^{\mathcal{H}_N\{[K], S_i\}} \\ &= Z_N[K] \end{aligned} \quad (1.35)$$

C'est donc cette dernière égalité qui assure que la fonction de partition et donc la physique, restent les mêmes au cours d'une transformation du groupe de renormalisation.

singularités. Nous allons voir comment ceci peut se produire dans le cas d'un exemple simple issu de la mécanique. Considérons une particule se déplaçant dans un puits de potentiel à une dimension. La forme du potentiel est donnée ci-dessous et nous supposons que la particule est soumise à des frottements afin que celle-ci converge vers une position d'équilibre après un certain temps.

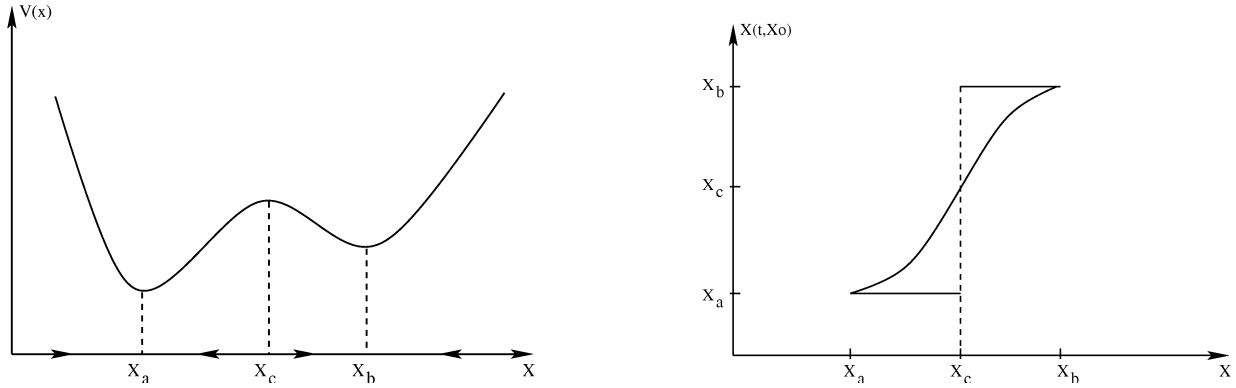


FIG. 1.5 – Représentation du potentiel $V(x)$. La seconde figure représente la position finale de la particule en fonction de sa position initiale. Les lignes horizontales correspondent à la limite $t \rightarrow \infty$.

Si nous lâchons la particule de n'importe quel point $X < X_c$, elle oscillera autour de X_a avant de s'arrêter en ce point. D'un autre côté, si cette même particule est lâchée d'une position $X > X_c$, elle oscillera et s'arrêtera en X_b . Ainsi, la position finale de la particule est une fonction discontinue de la position initiale de cette dernière, en dépit de la forme continue du potentiel. Les singularités ne proviennent donc pas du potentiel lui-même, mais du fait que la position finale correspond à considérer la limite $t \rightarrow \infty$.

Les points X_a , X_b et X_c sont les points fixes : si le système est présent en l'un de ces points à un instant t (avec une vitesse nulle), alors il y restera à un instant t' ultérieur. De plus, il existe deux variétés de points fixes appelés attractif ou répulsif. X_a et X_b sont des points fixes attractifs : ce sont des positions d'équilibre stable, où le système se retrouvera lorsque $t \rightarrow \infty$. Par contre, X_c est un point fixe répulsif.

L'ensemble des conditions initiales $\{X_0\}$ qui conduisent à un même point fixe est appelé bassin d'attraction. Dans notre exemple, le bassin d'attraction de X_a est l'ensemble des points tels que $X < X_c$, celui de X_b est celui des points $X > X_c$ et celui de X_c est X_c .

Cet exemple représente les comportements que nous pourrions observer après un nombre infini de transformations du groupe de renormalisation. Dans le cas de systèmes réalistes, il n'y aura plus un mais plusieurs paramètres : le système sera représenté de manière générale par un vecteur dans l'espace des constantes de couplage. Les transformations successives du groupe de renormalisation définiront alors une trajectoire pour le système dans l'espace des paramètres, ce qui permettra de tracer un diagramme de phase de notre modèle dans l'espace de ses constantes de couplage, diagramme généré par l'ensemble des conditions

initiales prises pour le système.

Comportement de la longueur de corrélation

Dès que nous considérons un grand nombre de transformations du groupe de renormalisation, nous pouvons mettre en évidence la présence de points fixes.

Supposons alors que nous connaissions une transformation du groupe de renormalisation $R_l[K]$. Tout point fixe $[K^*]$ de cette transformation vérifie nécessairement :

$$[K^*] = R_l[K^*] \quad (1.39)$$

De plus, nous savons aussi qu'à chaque itération de R_l , les échelles sont réduites d'un facteur l . Pour la longueur de corrélation, nous aurons donc la relation :

$$\xi[K'] = \xi[K]/l \quad (1.40)$$

qui indique que le système s'éloigne du point critique. Au point critique, nous aurons :

$$\xi[K^*] = \xi[K^*]/l \quad (1.41)$$

Cette équation admet trivialement deux solutions : $\xi = 0$ et $\xi = \infty$. Les points tels que $\xi = 0$ sont appelés points fixes triviaux, alors que ceux avec $\xi = \infty$ seront appelés points fixes critiques. Tout point fixe a son propre bassin d'attraction ; tout point situé dans un bassin d'attraction atteindra le point critique après un nombre infini de transformations de R_l .

Linéarisation autour des points fixes

Nous savons qu'un calcul du groupe de renormalisation effectué de manière exacte opère dans l'espace de tous les couplages possibles $K_1, K_2, \dots, K_\infty$ compatibles avec la symétrie. Au niveau du point fixe $[K^*]$ nous avons donc :

$$[K^*] = R_l[K^*] \quad (1.42)$$

Au voisinage de $[K^*]$ il est possible de linéariser (1.42) :

$$K'_l - K_l^* = \sum_m T_{lm}(K_m - K_m^*) \quad (1.43)$$

avec $T_{lm} \equiv \left. \frac{\partial K'_l}{\partial K_m} \right|_{K=K^*}$. La matrice T est non symétrique dans le cas général et nous considérerons les valeurs propres et vecteurs propres à gauche. Nous notons $\lambda^{(i)}$ les valeurs propres et $\Phi_m^{(i)}$ les vecteurs propres correspondant :

$$\sum_m \Phi_m^{(i)} T_{lm} = \lambda^{(i)} \Phi_l^{(i)} \quad (1.44)$$

Définissons les variables d'échelle u_i :

$$u_i = \sum_m \Phi_m^{(i)}(K_m - K_m^*) \quad (1.45)$$

Dans l'approximation linéaire, elles se comportent sous une transformation du groupe de renormalisation comme :

$$\begin{aligned} u'_i &= \sum_m \Phi_m^{(i)}(K'_m - K_m^*) \\ &= \sum_m \Phi_m^{(i)} \sum_l T_{ml}(K_l - K_l^*) \\ &= \lambda^{(i)} \sum_l \Phi_l^{(i)}(K_l - K_l^*) \\ &= \lambda^{(i)} u_i \end{aligned} \quad (1.46)$$

Les variables d'échelle se transforment donc multiplicativement au voisinage du point fixe. Nous pouvons alors distinguer trois types de comportements en fonction des valeurs de $\lambda^{(i)}$:

- si $\lambda^{(i)} > 1$, u_i est dit pertinent (“relevant”) ; des transformations répétées écartent u_i du point fixe.
- si $\lambda^{(i)} < 1$, u_i est dit non pertinent (“irrelevant”) ; des transformations répétées rapprochent u_i du point fixe.
- si $\lambda^{(i)} = 1$, u_i est dit marginal ; c'est un cas particulier que nous ne discuterons pas dans la suite.

Reprenons ceci dans le cas de l'exemple des spins de bloc introduit précédemment (figure 1.4). Au point fixe $K = 0$, les deux directions sont non pertinentes ; c'est un point fixe complètement stable. Pour le point fixe $K = \infty$, la direction K est non pertinente alors que celle de h est pertinente (nous avons un point stable pour $h = 0$). Finalement, pour le point K^* , les variables K et h sont toutes les deux pertinentes et nous avons un point fixe complètement instable.

Considérons maintenant de manière générale un point fixe F qui a n valeurs propres pertinentes dans un espace à N dimensions. De ce point émerge une surface à $N - n$ dimensions de tous les points attirés vers F (nous supposons que nous n'avons pas de valeurs propres marginales). Afin de converger vers le point critique, il faut donc spécifier n conditions initiales. Toujours dans le cas de la transition de phase ferromagnétique, nous avons besoin de deux conditions pour nous placer à un point critique (qui sont la température et le champ magnétique). Ainsi nous pouvons penser que F a deux valeurs propres pertinentes, toutes les autres étant non pertinentes. Pour illustrer ces propos, plaçons nous dans le cas $h = 0$ (nous n'aurons alors plus qu'une seule donnée pertinente). Considérons de plus un espace à deux paramètres K_1 et K_2 où K_1 est la constante de couplage entre deux plus proches voisins et K_2 celle entre second plus proches voisins. Le diagramme de flux obtenu

sera alors nécessairement de la forme donnée à la figure 1.6 : en effet, nous ne pouvons avoir qu'une seule direction pertinente et donc une seule direction suivant laquelle nous pourrions nous écarter du point critique.

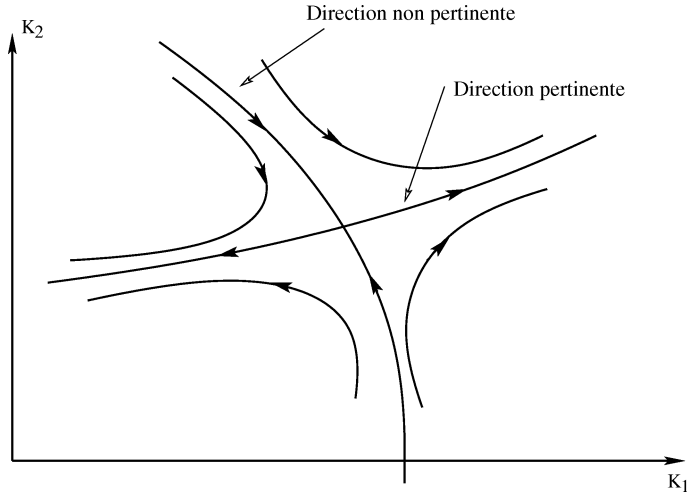


FIG. 1.6 – Diagramme de flux dans un espace à deux dimensions. Ici le point fixe n'est stable que dans une direction.

Nous voyons ici que même dans le cas où le hamiltonien initial ne contient pas de couplage entre second plus proches voisins au départ, ces derniers sont générés lors des itérations successives du groupe de renormalisation. Il en est de même pour toutes les autres constantes de couplage K_3, K_4, \dots associées à des valeurs propres non pertinentes compatibles avec les symétries du modèle.

Comportements d'échelle

Dans le cas où nous nous situons près d'un point fixe, l'approximation linéaire est valide et, comme nous allons le voir maintenant, cela implique l'existence de relations (dites d'échelle) entre les différents paramètres caractérisant le système.

Dans ce qui précède, nous avons vu que la transition de phase ferromagnétique est caractérisée par un point fixe avec deux variables d'échelle pertinentes. La première est liée à la température u_1 avec la valeur propre λ_1 et l'autre reliée au champ magnétique u_2 avec la valeur propre λ_2 . Nous avons aussi la présence d'une infinité de champs non pertinents u_3, u_4, \dots

Supposons que nous partions d'un endroit suffisamment proche du point fixe de sorte que l'approximation linéaire soit valide. Les valeurs initiales des champs d'échelle sont $u_i = u_i(t, h)$ où h est le champ magnétique et t la température réduite (qui mesure l'écart par rapport à la température critique) définie par :

$$t \equiv \frac{T - T^*}{T^*} \quad (1.47)$$

Lorsque t et h sont petits, nous pouvons montrer que $u_2 \propto h$ et $u_1 \propto t$. La transformation du groupe de renormalisation a été construite de manière à conserver la fonction de partition et donc l'énergie libre f . Nous pouvons la décomposer d'après :

$$Nf([K]) = Ng([K]) + Nl^{-d}f([K']) \quad (1.48)$$

où $g([K])$ est une constante analytique issue de la renormalisation, l le facteur d'échelle et d la dimension du réseau. La partie singulière de f qui nous intéresse satisfait donc la loi de transformation homogène :

$$f_s([K]) = l^{-d}f_s([K']) \quad (1.49)$$

En réexprimant cette relation en fonction des champs d'échelle, après une puis n transformations :

$$\begin{aligned} f_s(u_1, u_2, \dots) &= l^{-d}f_s(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots) \\ &= l^{-nd}f_s(\lambda_1^n u_1, \lambda_2^n u_2, \dots) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Puisque $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ les deux premiers arguments grandissent avec n . Choisissons alors n tel que $\lambda_1^n u_1 = A$ où $|A| \ll 1$ de sorte que l'approximation linéaire reste valide. Nous aurons :

$$n = \frac{\log A - \log u_1}{\log \lambda_1} \quad (1.51)$$

En remplaçant dans l'équation (1.50),

$$f_s(u_1, u_2, \dots) = l^{-d \frac{\log A}{\log \lambda_1}} l^{-d \frac{\log u_1}{\log \lambda_1}} f_s(A, \lambda_2^{\frac{\log A - \log u_1}{\log \lambda_1}} u_2, \dots) \quad (1.52)$$

Définissons alors :

$$y_1 = \frac{\log \lambda_1}{\log l} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\log \lambda_2}{\log l} \quad (1.53)$$

Or nous savons que $u_1 \propto t$ et $u_2 \propto h$, donc :

$$f_s(t, h) = |t|^{d/y_1} \Phi_{\geq} \left(\frac{h}{|t|^{y_2/y_1}} \right) \quad (1.54)$$

où $\Phi_{>} = f_s(+A, \dots)$ et $\Phi_{<} = f_s(-A, \dots)$ sont des fonctions analytiques différentes pour $t > 0$ et $t < 0$ dans le cas général (elles correspondent à la partie singulière de l'énergie libre de part et d'autre de la température critique). C'est cette dernière expression qui va nous permettre de déterminer les exposants critiques. Dans le tableau qui suit, nous rappelons les définitions des exposants critiques, puis nous donnons leurs expressions en fonction des paramètres de notre étude et de la formule (1.54). Nous sommes finalement arrivés à caractériser la transition de phase *via* le groupe de renormalisation, ce qui était notre objectif initial.

	définition des expo- sants critiques	résultats de eq.(1.54)	exposants critiques
chaleur spécifique	$c(t, h) _{h=0} \propto t^{-\alpha}$	$\frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} \propto t ^{\frac{d}{y_1}-2}$	$\alpha = 2 - \frac{d}{y_1}$
susceptibilité	$\chi(t, h) _{h=0} \propto t^{-\gamma}$	$\frac{\partial^2 f_s}{\partial h^2} \propto t ^{\frac{d-2y_2}{y_1}}$	$\gamma = \frac{2y_2-d}{y_1}$
aimantation en champ nul	$m(t, h) _{h=0} \propto t^\beta$	$\frac{\partial f_s}{\partial h} \propto (-t)^{\frac{d-y_2}{y_1}}$	$\beta = \frac{d-y_2}{y_1}$
aimantation à $T = T^*$	$m(t, h) _{T=T^*} \propto h ^{1/\delta}$	$\frac{\partial f_s}{\partial h} \propto h^{\frac{d}{y_2-1}}$	$\delta = \frac{y_1}{d-y_2}$

Nous pouvons remarquer que les quatre quantités calculées ne dépendent que de deux variables y_1 et y_2 . Nous pouvons donc écrire des relations, appelées relations d'échelle, qui vont relier les exposants critiques ; par exemple :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (1.55)$$

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2 \quad (1.56)$$

Ces coefficients peuvent dans certains cas être déterminés expérimentalement et donneront des contraintes sur les modèles utilisés.

Dans ce qui précède, nous avons omis de considérer les champs non pertinents dans notre détermination des exposants critiques. Afin de voir si cette hypothèse est légitime, reprenons le calcul précédent avec un champ u_3 associé à la valeur propre $y_3 < 0$. Pour la partie singulière de l'énergie libre, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
f_s(t, h) &= f_s(u_1, u_2, u_3, \dots) \\
&= l^{-d} f_s(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3, \dots) \\
&= |t|^{d/y_1} \Phi_{\geq} \left(\frac{h}{|t|^{y_2/y_1}}, u_3 |t|^{-y_3/y_1}, \dots \right)
\end{aligned} \quad (1.57)$$

Comme $y_3 < 0$, $u_3 |t|^{-y_3/y_1} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, donc nous pouvons développer par rapport à cette nouvelle variable :

$$f_s(t, h) = |t|^{2-\alpha} \left[\Phi_{\geq 1} \left(\frac{h}{|t|^{y_2/y_1}} \right) + u_3 |t|^{-y_3/y_1} \Phi_{\geq 2} \left(\frac{h}{|t|^{y_2/y_1}} \right) + \dots \right] \quad (1.58)$$

Par exemple, la chaleur spécifique en champ nul va s'écrire :

$$C = |t|^{-\alpha} [A + Bt^{-y_3/y_1} + \dots] \quad (1.59)$$

Nous voyons donc que les valeurs propres introduisent des petites corrections par rapport au scaling dominant. Il est donc *a priori* justifié de les négliger en première approximation, mais il existe des cas où leur contribution est non négligeable.

La présentation du groupe de renormalisation que nous venons de voir en physique statistique est loin d'être exhaustive, mais le but était d'introduire les principaux concepts tout en s'affranchissant des complications techniques dues à la théorie quantique des champs. Nous allons mettre en évidence les liens qui peuvent être faits entre ces deux formulations du groupe de renormalisation.

1.3 Liens entre le groupe de renormalisation à la Wilson et l'approche de théorie des champs

La description adoptée dans le chapitre précédent est en fait une description du type champ moyen. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut donner qu'une description souvent approximative de la transition car elle ne prend pas en compte les corrélations à longue portée. L'idée de Ginzburg-Landau a donc été d'inclure les fluctuations de grande taille de manière approchée dans une approche phénoménologique. En pratique, il s'agit dans un premier temps d'exprimer le fait que près de la transition de phase le paramètre d'ordre est petit et donc d'exprimer l'énergie libre comme un développement en puissances de ce paramètre d'ordre. Dans un second temps, nous rajoutons un terme prenant en compte des fluctuations de grande taille. Le spin devient donc une variable locale (que nous noterons m), et nous obtenons explicitement pour ce modèle :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{a^d} \int d^d \vec{r} \left[\frac{t}{2} m^2 + \frac{K a^2}{2} (\vec{\nabla} m)^2 + u m^4(\vec{r}) \right] \quad (1.60)$$

où t est toujours la variable qui mesure l'écart à la température critique et a est le pas du réseau que nous faisons apparaître dans cette expression pour rendre les autres paramètres sans dimension.

Dans le cas de la physique statistique, le pas du réseau est une échelle de coupure pour les courtes distances, ou, de manière équivalente, pour les hautes énergies. Par contre, une telle échelle n'existe pas dans le cas de la théorie des champs à cause de la localité de la théorie (il n'y a pas de cut-off naturel Λ) : ceci revient à considérer que la théorie est valable jusqu'à des échelles $\Lambda \rightarrow \infty$. Or, en théorie quantique des champs, la physique est simple aux petites échelles (où nous avons un vide de particules), mais elle se complique aux grandes échelles où nous aurons la création de paires particules-antiparticules. C'est donc bien dans le domaine où Λ est grand qu'il va falloir faire des approximations et modifier

la physique. En théorie des champs, l'équivalent du modèle de Ginzburg-Landau est la théorie en ϕ^4 :

$$\mathcal{L} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 \right] \quad (1.61)$$

Du point de vue de la mécanique statistique, a est fixe, mais au voisinage de la transition la longueur de corrélation ξ diverge : le régime critique est caractérisé par un grand rapport ξ/a . En théorie des champs, nous décidons de travailler à une échelle ξ que nous fixons et nous retrouvons le grand rapport ξ/a dans la limite $a \rightarrow 0$ et nous étudions ainsi les phénomènes dominés par les fluctuations critiques. Afin de définir correctement la limite du continu, il est nécessaire de connaître les divergences dans l'UV. Pour ceci, nous aurons besoin d'une méthode qui coupe les contributions à haute énergie : c'est la régularisation. Nous verrons plus loin qu'il existe de nombreuses méthodes de régularisation qui ont chacune des propriétés particulières. Les conditions que nous imposerons sur la manière de régulariser nous amènera à définir une nouvelle manière d'introduire le cut-off.

Nous pouvons de plus donner les fonctions de Green à deux points et à l'arbre en physique statistique et en théorie des champs. Pour une particule scalaire :

$$G_{PS}(k) = \frac{1}{\vec{k}^2 + (1/\xi)^2} \quad \Longrightarrow \quad G_{TQC}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (1.62)$$

où le propagateur G_{TQC} est exprimé ici dans un espace euclidien.

Une différence fondamentale entre l'approche du groupe de renormalisation en physique statistique et en théorie des champs est que dans cette dernière les transformations du groupe de renormalisation vont faire varier les paramètres du modèle sans pour autant modifier les degrés de liberté de ce dernier⁵. Parmi les différentes méthodes existantes, nous porterons un intérêt particulier à l'approche dite de Wilson. Cette dernière est assez intuitive : nous couperons successivement notre théorie à des échelles Λ et $\Lambda - \delta\Lambda$. Ensuite, la variation des paramètres entre ces deux échelles de coupure nous donnera la variation des constantes de couplage du modèle sous une transformation infinitésimale. Le système d'équations différentielles non linéaires couplées obtenu sera les équations du groupe de renormalisation. C'est la résolution de ce système qui nous permettra de connaître l'évolution des paramètres.

1.4 Renormalisation en théorie quantique des champs

Comme dans la première partie, nous commencerons par considérer un exemple simple pour voir comment se formule le groupe de renormalisation en théorie quantique des

⁵Il existe une méthode pour modifier les degrés de liberté en théorie des champs : c'est ce que l'on appelle le raccordement à la Wilson. Comme son nom l'indique, cet outil nous permet de raccorder deux théories entre elles, contenant chacune des degrés de liberté différents et possédant chacune un ensemble d'équations du groupe de renormalisation qui contrôleront l'évolution de ses paramètres.

champs. Ensuite, nous passerons en revue deux méthodes qui permettront d'obtenir les équations du groupe de renormalisation. Enfin, pour finir, nous introduirons le formalisme général qui nous permettra par la suite de passer à l'étude de modèles plus complexes. Dans tout ce qui suit - sauf indication contraire -, nous choisirons de travailler dans un espace de Minkowski; bien que moins adaptée aux descriptions du groupe de renormalisation, cette description reste cependant plus naturelle et nous ne nous placerons dans un espace euclidien que lorsque ce sera utile.

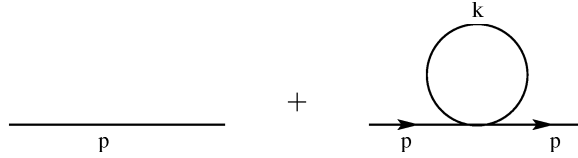
1.4.1 Renormalisation du lagrangien de la théorie Φ^4

Ici, contrairement à ce qui précède, la première étape en théorie des champs sera de renormaliser la théorie, c'est-à-dire de s'affranchir des divergences (ou régulariser) **et** de redonner un sens physique aux différentes constantes de couplage au-delà de l'approximation à l'arbre.

Donnons pour commencer l'expression de la densité lagrangienne de la théorie en Φ_0^4 non renormalisée, où Φ_0 est un champ scalaire :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_0 \partial^\mu \Phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \Phi_0^2 - \frac{g_0}{4!} \Phi_0^4 \quad (1.63)$$

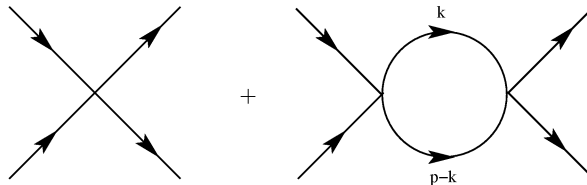
m_0 et g_0 sont respectivement la masse et la constante de couplage non renormalisées. Dans le cas où nous considérons la théorie à une boucle, les termes qui vont contribuer à la masse seront :



Le second terme est proportionnel à :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_0^2} \quad (1.64)$$

qui diverge dans le domaine des grandes énergies $k \rightarrow \infty$. De la même manière, les diagrammes qui contribuent à l'amplitude de diffusion à une boucle sont :



Cette fois-ci la contribution à une boucle est proportionnelle à :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((p-k)^2 - m_0^2)} \quad (1.65)$$

et diverge également dans l'UV. Contrairement à ce que nous venons de voir en physique statistique, où la physique aux petites distances (ou aux grandes énergies) était limitée par le pas du réseau, ici nous avons une théorie locale des champs, les degrés de liberté étant définis en tout point de l'espace-temps : il n'existe donc plus de borne inférieure concernant la physique des courtes distances. Le fait de s'affranchir des divergences qui apparaissent de manière naturelle dans les calculs à une boucle sera par conséquent la première étape pour rendre physique la théorie ; c'est ce qu'on appelle la régularisation et nous allons maintenant en expliquer le principe.

Commençons d'abord par introduire des quantités que nous appellerons renormalisées :

$$\Phi = Z^{-1/2} \Phi_0 \quad (1.66)$$

$$m^2 = m_0^2 + \delta m^2 \quad (1.67)$$

$$g = g_0 + \delta g \quad (1.68)$$

Le lagrangien (1.63) se réécrit alors suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{Z}{2} (m^2 - \delta m^2) \Phi^2 - \frac{Z^2}{4!} (g - \delta g) \Phi^4 \quad (1.69)$$

que nous pouvons aussi reformuler selon :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \quad (1.70)$$

avec :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{g}{4!} \Phi^4 \quad (1.71)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{Z-1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{Z-1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{Z}{2} \delta m^2 \Phi^2 - \frac{Z^2-1}{4!} g \Phi^4 + \frac{Z^2}{4!} \delta g \Phi^4 \quad (1.72)$$

où le lagrangien \mathcal{L}_0 est le lagrangien des champs renormalisés sans interactions et \mathcal{L}_1 est appelé lagrangien des contre-termes. Le propagateur du champ renormalisé s'écrit :

$$\Delta'(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{k^2 - m^2} \Pi^* \frac{1}{k^2 - m^2} + \dots \quad (1.73)$$

où $\frac{1}{k^2 - m^2}$ est le propagateur du champ provenant de \mathcal{L}_0 et Π^* est la self énergie à une particule irréductible (* signifiant 1PI) qui provient de \mathcal{L}_1 . Sous forme diagrammatique, (1.73) s'écrit :

$$\text{thick line} = \text{thin line} + \text{thin line with loop} + \dots$$

Dans l'expression de Π^* nous aurons des contributions à l'arbre plus les diagrammes en boucles :

$$\Pi^* = -(Z - 1)[k^2 - m^2] + Z\delta m^2 + \Pi_{loop}^* \quad (1.74)$$

Le but général de la renormalisation étant non seulement de s'affranchir des infinis qui interviennent dans les calculs mais aussi de rendre physique la théorie, nous nous attendons à ce que m^2 et g soient les grandeurs finies mesurées expérimentalement ; cela implique qu'il faut imposer deux conditions sur la self-énergie Π^* :

- le pôle du propagateur doit correspondre à la "vraie" masse de la particule :

$$\Pi^*(m^2) = 0 \quad (1.75)$$

- le pôle du propagateur doit avoir un résidu égal à 1 en $k^2 = m^2$, d'où :

$$\left. \frac{d\Pi^*(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=m^2} = 0 \quad (1.76)$$

En imposant ces deux conditions, nous pourrions ainsi déterminer la forme des contre-terms à partir de l'expression des contributions en boucles (qui seront calculées explicitement une fois que nous aurons défini une méthode de régularisation, c'est-à-dire une méthode qui permette de définir les intégrales primitivement divergentes).

Ici, nous avons donc :

$$Z\delta m^2 = -\Pi_{loop}^*(m^2) \quad (1.77)$$

$$Z = 1 + \left. \frac{d\Pi_{loop}^*}{dk^2} \right|_{k^2=m^2} \quad (1.78)$$

Finalement, les intégrales divergentes que nous avons vu précédemment proviennent de Π_{loop}^* et ces dernières seront absorbées dans les expressions des contre-terms ; en réexprimant ainsi la théorie, nous réalisons que cette dernière est rendue finie après renormalisation. Par contre, si nous voulions faire les calculs à deux boucles, il faudrait considérer d'autres diagrammes qui amèneraient d'autres contributions divergentes et d'autres contre-terms seraient nécessaires pour éliminer les divergences. De manière générale, la renormalisation est une méthode que l'on applique toujours ordre par ordre ; cependant, la complexité des calculs dépendra du type de théorie considérée (renormalisable ou non). Nous verrons dans la suite quelles sont les théories renormalisables (au sens de "renormalisable à tous les ordres") en introduisant le comptage en puissances.

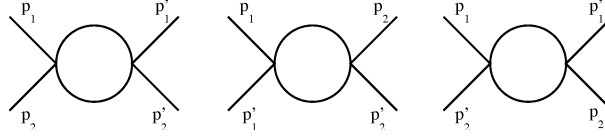
1.4.2 Equations du groupe de renormalisation

Approche à la Gell-Mann/Low

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution de la constante de couplage du terme d'interaction du lagrangien de la théorie Φ^4 , dont nous rappelons l'expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{g}{4!} \Phi^4 \quad (1.79)$$

Si nous considérons la théorie à une boucle, les diagrammes des différentes contributions à l'amplitude de diffusion élastique sont :



Dans l'espace des impulsions, la contribution des diagrammes en boucles peut se ramener après avoir introduit les paramètres de Feynman à une expression proportionnelle à (dans un espace Euclidien) :

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = 2\pi^2 \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + m^2)^2} \quad (1.80)$$

Comme mentionné précédemment, cette intégrale diverge à cause des contributions à haute énergie. Nous rappelons de plus que ces contributions étaient absentes lors de l'approche en physique statistique à cause du cut-off naturel donné par le pas du réseau. L'idée est alors, afin de s'affranchir des contributions de la physique des hautes énergies, de procéder par analogie avec la physique statistique, c'est-à-dire d'introduire un cut-off. Il existe différentes façons de procéder et les différentes méthodes de régularisation seront détaillées dans le chapitre suivant. Dans ce qui suit nous utiliserons la méthode dite du cut-off naïf qui consiste simplement à remplacer la borne supérieure des intégrales divergentes par un cut-off Λ (cette méthode présente l'inconvénient majeur de briser les symétries du modèle, mais nous traiterons ce problème par la suite). Schématiquement :

$$\int_0^\infty dk \dots \implies \int_0^\Lambda dk \dots \quad (1.81)$$

Physiquement, ceci signifie que nous considérons la théorie jusqu'à une échelle Λ et les contributions des hautes énergie seront supprimées (en pratique, les particules ayant une masse supérieure au cut-off Λ). En utilisant cette méthode, le calcul de l'amplitude de diffusion représentée à la figure précédente donne alors :

$$A = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\} + \mathcal{O}(g^3) \quad (1.82)$$

où s , t et u sont les variables de Mandelstam, définies dans un espace de Minkowski suivant :

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p'_1)^2, \quad u = (p_1 - p'_2)^2 \quad (1.83)$$

Nous voyons alors clairement que l'amplitude de diffusion écrite sous cette forme dépend de l'échelle Λ à laquelle nous avons coupé la théorie, ce qui est évidemment non physique. Pour éliminer la présence du cut-off dans cette relation, il faut réexprimer l'amplitude de diffusion en fonction d'une constante de couplage renormalisée, que nous prenons par définition égale à la valeur de l'amplitude de diffusion à une certaine échelle arbitraire μ . Par exemple, nous pouvons choisir $\mu = 0$, soit :

$$g_R \equiv A(s = t = u = -\mu^2 = 0) = g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + \mathcal{O}(g^3) \quad (1.84)$$

En inversant la relation précédente, à l'ordre $\mathcal{O}(g^3)$, nous obtenons :

$$g = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (1.85)$$

Nous réexprimons alors A en fonction de la constante de couplage renormalisée g_R :

$$A = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) \right\} + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (1.86)$$

que nous pouvons aussi écrire :

$$A = g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{tx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{ux(1-x)}{m^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (1.87)$$

L'avantage de l'écriture (1.86) est que nous avons fait disparaître la dépendance en Λ dans l'amplitude de diffusion. Cependant, pour des grandes valeurs de l'impulsion, les termes contenus dans le logarithme vont devenir importants et la théorie des perturbations deviendra inapplicable pour des valeurs de s , t et $u \gg m$ pour lesquelles $g_R \ln \left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2} \right) > 1$. La théorie formulée ainsi est alors inexploitable et il faut procéder d'une autre façon. Nous pouvons noter que c'est d'ailleurs pour résoudre ce type de problèmes (où la théorie des perturbations ne fonctionne plus) que les outils du groupe de renormalisation ont été introduits précédemment.

L'idée générale est de considérer une nouvelle échelle arbitraire μ (différente de 0 cette fois) à laquelle nous allons définir la constante de couplage effective g_μ . Sachant que g_μ n'a

a priori aucune signification physique, nous pourrions faire glisser μ jusqu'à une échelle μ' infiniment proche (ce qui nous permettra d'utiliser la théorie des perturbations pour passer d'une échelle à l'autre). Ensuite, nous établirons une relation entre g_μ et $g_{\mu'}$: cette relation apparaîtra dans le cas général sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles qu'il faudra résoudre pour connaître l'évolution des constantes de couplage de notre modèle. Pour ce faire, nous commençons par exprimer notre constante de couplage à une échelle arbitraire μ :

$$g_\mu \equiv A(s = t = u = -\mu^2) \quad (1.88)$$

En utilisant la définition de g_μ et celle de l'amplitude de diffusion, nous pouvons écrire :

$$g_\mu = g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} - 1 \right) \right\} + \mathcal{O}(g^3) \quad (1.89)$$

Une fois encore, notre expression dépend de Λ . Afin de s'affranchir de cette dépendance explicite, nous exprimons g_μ en fonction des quantités renormalisées :

$$g_\mu = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2} \right) + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (1.90)$$

Dans ce cas l'amplitude élastique de diffusion ne dépend plus de Λ mais de l'échelle arbitraire μ que nous avons introduite (μ est aussi appelé point de renormalisation). Notre problème n'est toujours pas résolu, car lorsque μ tend vers l'infini, $g_R \ln \left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2} \right)$ tend aussi vers l'infini et invalide la théorie des perturbations. Considérons alors une échelle μ' proche de μ . Par analogie avec ce qui précède, nous pouvons écrire $g_{\mu'}$ sous la forme :

$$g_{\mu'} = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{\mu'^2 x(1-x)}{m^2} \right) + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (1.91)$$

De manière générale, nous pouvons relier la constante de couplage à l'échelle μ' à celle en μ par un calcul perturbatif. La relation entre les constantes de couplage aux deux échelles peut alors s'écrire formellement :

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}) \quad (1.92)$$

Si nous souhaitons connaître l'évolution de nos constantes de couplage en fonction de l'échelle considérée, nous prenons la dérivée par rapport à l'échelle μ pour obtenir :

$$\mu \frac{dg_\mu}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, \frac{m}{\mu}) \Big|_{z=1} \quad (1.93)$$

C'est cette dernière relation qui nous permet de connaître l'évolution des constantes de couplage. De manière analogue, nous aurons le même type d'équations pour la renormalisation des fonctions d'onde, ainsi que dans le cas où nous aurons plusieurs constantes de couplage ; nous aborderons ces deux cas dans la suite pour voir comment nous étendons

cette méthode à des cas plus complexes.

Cette relation nous permet d'introduire la fonction β définie par :

$$\beta(g_\mu, \frac{m}{\mu}) \equiv \frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, \frac{m}{\mu}) \Big|_{z=1} \quad (1.94)$$

De plus, nous avons considéré que μ et μ' sont proches et que $\frac{m}{\mu} \rightarrow 0$ (où la théorie des perturbations ne s'applique pas). Dans ces approximations, nous pouvons définir une nouvelle fonction β :

$$\beta(g_\mu) \equiv \beta(g_\mu, \frac{m}{\mu}) \quad (1.95)$$

Pour calculer la fonction β explicitement, nous écrivons la différence :

$$\begin{aligned} g_{\mu'} - g_\mu &\equiv \mu \frac{\partial g_\mu}{\partial \mu} \\ &= -\frac{3g_\mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right) \\ &= -\frac{3g_\mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{(m/\mu)^2 + x(1-x)}{(m/\mu)^2 + (\mu'/\mu)^2 x(1-x)} \right) \end{aligned} \quad (1.96)$$

où la fonction que nous venons de définir est bien de la forme (1.95). Afin d'obtenir l'expression explicite de β , nous dérivons l'expression précédente :

$$\beta(g_\mu) = \frac{6g_\mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m/\mu)^2 + x(1-x)} \quad (1.97)$$

soit finalement, pour $\mu \gg m$:

$$\mu \frac{dg_\mu}{d\mu} = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_\mu^3) \quad (1.98)$$

En conclusion, nous avons ici résolu le problème de l'étude de l'évolution de la constante de couplage du modèle sur de grands intervalles énergétiques, où *a priori* la théorie des perturbations ne marchait pas. Contre toute attente, il faut de même utiliser la théorie des perturbations pour cela.

Dans cette partie, nous nous sommes limités au calcul de la fonction β pour la constante de couplage g sans nous soucier de la masse ni de la renormalisation de la fonction d'onde (nous pouvons montrer que dans la théorie en Φ^4 la fonction d'onde n'est pas renormalisée à l'ordre à une boucle, mais ceci deviendra plus clair une fois que nous aurons introduit le comptage en puissances qui nous permettra de déterminer le nombre, ainsi que la forme des contre-terms).

Dans ce qui précède, nous avons introduit plusieurs échelles énergétiques; il est maintenant temps de préciser leurs rôles respectifs, le but dans lequel elles ont été introduites

ainsi que les contraintes auxquelles elles sont soumises (ceci sera utile dans la suite pour bien comprendre les différences avec la renormalisation au sens de Wilson); la première constante introduite est Λ , qui sert à couper l'intégrale sur les moments. Elle supprime la physique des hautes énergies dont nous cherchons à nous affranchir. De plus, nous souhaitons que cette prescription ne modifie pas (ou très peu) la physique des grandes distances à laquelle nous allons nous intéresser. Le théorème de découplage (ou théorème d'Appelquist-Carrazone [13], pour plus de détails se référer à l'annexe A) nous assure que c'est le cas pourvu que Λ reste très grande par rapport à toutes les masses contenues dans le modèle, soit :

$$\Lambda \gg m \quad (1.99)$$

Mais une fois que nous avons réexprimé l'amplitude de diffusion en fonction des constantes de couplage renormalisées, nous ne pouvons plus être assurés que la théorie des perturbations reste valide (eq.(1.87)). En effet pour des grandes impulsions, le terme $g_R \ln \left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2}\right)$ devient grand. C'est pour résoudre ce problème des grandes valeurs de l'impulsion que nous introduisons une nouvelle échelle arbitraire μ . Cette échelle est appelée point de renormalisation. Nous remarquons que :

$$\Lambda \gg \mu \gg m \quad (1.100)$$

En effet, nous nous situons toujours très en dessous de l'énergie de coupure du modèle afin que le théorème de découplage s'applique sans problème et nous avons introduit μ pour traiter le cas des grandes impulsions, d'où $\mu \gg m$. Enfin, nous voulions essayer de rendre la théorie des perturbations valide aux grandes échelles et c'est pour ceci que nous avons introduit une dernière échelle μ' telle que :

$$\frac{\mu'}{\mu} \simeq 1 \quad (1.101)$$

ce qui permet de réaliser le développement perturbatif que nous souhaitons afin d'obtenir l'évolution sur un grand intervalle énergétique.

Toujours pour la renormalisation à la Gell-Mann/Low, nous pouvons reformuler le calcul précédent de manière un peu différente, en utilisant une autre méthode de régularisation appelée régularisation dimensionnelle. L'esprit de cette méthode est de calculer les intégrales "divergentes" dans une dimension non entière n proche de 4 et d'exprimer la divergence en termes de $\frac{1}{4-n}$. Nous présenterons plus en détail cette méthode dans le chapitre suivant. Elle permet de présenter le problème sous une forme qui sera plus proche de celle de Wilson introduite par la suite.

A une boucle, l'amplitude de diffusion peut se mettre sous la forme :

$$A = g + \frac{g^2}{2}[F(s) + F(t) + F(u)] \quad (1.102)$$

où s , t et u sont les variables de Mandelstam définies en (1.83), alors que $F(p^2)$ est donnée par :

$$F(p^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k-p)^2 - m_0^2)} \quad (1.103)$$

En régularisant la théorie avec la régularisation dimensionnelle (nous nous plaçons pour cela dans un espace euclidien), nous pouvons alors mettre cette intégrale sous la forme (les détails du calcul peuvent être trouvés dans [17]) :

$$F(p^2) = \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \int_0^1 d\alpha \left[\frac{m_0^2 \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} \right]^{\frac{n}{2}-2} \quad (1.104)$$

Nous remarquons que dans cette dernière expression nous avons introduit une quantité arbitraire μ (différente de celle introduite précédemment), qui a la dimension d'une masse, de manière à rendre le terme à l'intérieur de l'intégrale sans dimension. Nous verrons dans la suite pourquoi il est important de faire apparaître cette échelle. Dans le cas où nous travaillons en dimension proche de 4, la fonction Γ se développe suivant :

$$\Gamma(2 - \frac{n}{2}) \longrightarrow \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} - \gamma \quad (1.105)$$

où γ est la constante d'Euler. Il n'est pas nécessaire de connaître les précisions mathématiques ici, la seule chose importante étant que les divergences de la théorie sont contenues dans les pôles du développement lorsque $n \rightarrow 4$. Nous écrivons ceci en séparant les pôles et la partie renormalisée dans l'expression de F :

$$F(p^2) = \mu^{n-4} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{n-4} + F_{ren}(p^2) \quad (1.106)$$

Nous notons que la fonction F_{ren} est sans dimension et que c'est en fait la fonction F à laquelle nous avons soustrait les pôles; dans un tel cas nous parlons de soustraction minimale. Nous avons donc :

$$F_{ren}(p^2) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \left[\frac{m_0^2 + \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} \right]^{\frac{n}{2}-2} + \frac{2}{n-4} \right\} \quad (1.107)$$

qui est bien une fonction convergente dans la limite $n \rightarrow 4$. En réinjectant cette dernière expression dans l'amplitude de diffusion (1.102), nous obtenons :

$$A = g_0 + g_0^2 \frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^2} \frac{3}{n-4} + \frac{g_0^2}{2} \mu^{n-4} (F_{ren}(s) + F_{ren}(t) + F_{ren}(u)) \quad (1.108)$$

Or nous savons que l'amplitude de diffusion doit être une observable physique finie; nous allons donc réexprimer A en fonction de la constante de couplage renormalisée g qui va absorber les divergences qui apparaissent dans l'expression avec g_0 . Nous montrons que :

$$A = \mu^{4-n} \left\{ g + \frac{1}{2} g^2 [F_{ren}(s) + F_{ren}(t) + F_{ren}(u)] \right\} \quad (1.109)$$

Cette réécriture nous permet finalement d'écrire la relation entre g et g_0 :

$$g_0 = g \mu^{4-n} \left[1 - \frac{3g}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \right] \quad (1.110)$$

de la forme générale :

$$g_0 = g\mu^{4-n} [1 + \text{pôles}] \quad (1.111)$$

Nous allons alors imposer que les constantes de couplage nues ne dépendent pas de l'échelle de coupure, soit :

$$\mu \frac{dg_0}{d\mu} = 0 \quad (1.112)$$

Cette dernière égalité est très importante, car nous la retrouverons lors de l'étude du groupe de renormalisation au sens de Wilson. Intuitivement, nous nous attendons en effet à ce que les constantes de couplage de notre modèle ne dépendent pas d'une échelle arbitraire. En réinjectant l'expression (1.110) dans cette dernière équation, nous montrons facilement que :

$$\beta(g, n) \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} = (n-4)g + \frac{3g^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g^3) \quad (1.113)$$

ce qui est le résultat que nous avons trouvé précédemment dans la limite $n \rightarrow 4$. Nous voyons donc que les deux méthodes conduisent au même résultat⁶. Alors que dans le cas précédent nous avons du introduire trois échelles arbitraires, ici nous n'avons plus besoin que d'une seule (en plus de la dimension du problème) ; cependant l'idée est toujours la même, à savoir que la manière de paramétrer l'écriture de l'amplitude de diffusion ne doit pas avoir d'influence sur la valeur de cette dernière et donc sur la physique étudiée. Cependant, dans ce dernier cas, nous perdons le lien avec la théorie des perturbations qui était au centre de ce qui avait été fait dans le premier traitement.

Finalement, pour avoir l'évolution de la fonction β il faut intégrer (1.113) en dimension $n = 4$. L'évolution de g va donc être gouvernée par :

$$g(\mu^2) = \frac{g(\mu_0^2)}{1 - \frac{3g(\mu_0^2)}{(4\pi)^2} \ln(\mu/\mu_0)} \quad (1.117)$$

Nous allons clore cette partie en montrant comment nous pouvons renormaliser la masse, toujours dans le cadre de la théorie en Φ^4 . En partant du lagrangien non renormalisé, la

⁶Une troisième méthode pour arriver à la même équation d'évolution est d'exprimer g_0 en fonction de g à deux échelles μ et $\mu' = \mu + \delta\mu$ infiniment proches. Nous aurons :

$$g_0 = g(\mu)\mu^{(4-n)} \left[1 - \frac{3g(\mu)}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \right] \quad (1.114)$$

$$= g(\mu + \delta\mu)(\mu + \delta\mu)^{(4-n)} \left[1 - \frac{3g(\mu + \delta\mu)}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \right] \quad (1.115)$$

En comparant ces deux expressions, nous montrons aisément que :

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = (n-4)g + \frac{3g^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g^3) \quad (1.116)$$

ce qui est une fois de plus l'expression de la fonction β .

self-énergie $\Sigma_0(p)$ est reliée au propagateur $G_0(p)$ par :

$$G_0(p) = \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Sigma_0(p)} \quad (1.118)$$

Graphiquement, nous pouvons développer le propagateur en puissances de la self-énergie suivant :

$$\text{thick line} = \text{thin line} + \text{thin line with circle} + \dots$$

Au premier ordre de la théorie des perturbations, seul le tadpole va contribuer à $\Sigma_0(p)$. Toujours en utilisant la régularisation dimensionnelle, nous montrons que cette contribution est égale à :

$$\Sigma_0^{(1)}(p) = \frac{1}{2} g_0 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m_0^2} = \frac{1}{2} g_0 \frac{(m_0^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(1 - \frac{n}{2}) \quad (1.119)$$

En se rappelant qu'à l'ordre le plus bas $g_0 = g\mu^{4-n}$ et en remplaçant m_0 par m (car les deux masses sont égales dans le cas où on n'a pas d'interactions), $\Sigma_0^{(1)}(p)$ s'écrit aussi :

$$\Sigma_0^{(1)}(p) = m^2 \frac{g}{2(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\frac{n}{2}-2} \Gamma(1 - \frac{n}{2}) \quad (1.120)$$

Lorsque nous prenons la limite $n \rightarrow 4$, le pôle de la self-énergie est égal à :

$$\Sigma_{0,\text{div}}^{(1)}(p) = \frac{g}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \quad (1.121)$$

Comme nous l'avons fait précédemment en (1.111), nous allons absorber les pôles qui apparaissent dans le calcul à une boucle en soustrayant la partie divergente :

$$m_0^2 = m^2 \left[1 - \frac{g}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \right] \quad (1.122)$$

Toujours par analogie avec ce qui précède, nous savons que la masse m_0 ne dépend pas de l'échelle à laquelle nous considérons la théorie, soit :

$$\mu \frac{dm_0}{d\mu} = 0 \quad (1.123)$$

ce qui nous permet finalement d'obtenir l'équation d'évolution que nous cherchions à déterminer pour la masse :

$$\mu \frac{dm^2}{d\mu} = \frac{g}{(4\pi)^2} m^2 \quad (1.124)$$

Nous venons ici de présenter différentes manières d’appréhender le groupe de renormalisation au sens de Gell-Mann/Low. Une autre approche du groupe de renormalisation a été introduite par Wilson, tout d’abord en physique statistique, puis en théorie des champs ; cette autre méthode est équivalente à la première (elle fournit les mêmes équations), mais dans l’esprit elle est beaucoup plus proche de ce qui est fait dans les théories effectives, avec le raccordement à la Wilson. C’est cette méthode que nous allons maintenant présenter.

Groupe de renormalisation au sens de Wilson

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps présenter les idées générales des équations du groupe de renormalisation au sens de Wilson, puis nous l’appliquerons, toujours dans le cas de la théorie en Φ^4 , afin de déterminer les équations d’évolution de la constante de couplage et de la masse du lagrangien.

Comme dans tout ce qui précède, la première étape consiste à s’affranchir des quantités divergentes qui apparaissent dans les calculs en boucles. Pour ceci, nous allons de nouveau introduire un cut-off Λ sur les impulsions. A la différence de ce que nous avons réalisé jusqu’à présent, nous n’allons plus essayer de faire disparaître le cut-off de nos expressions, mais au contraire c’est ce dernier qui va nous permettre de connaître la dépendance de nos paramètres vis-à-vis de l’échelle considérée. Un des avantages de cette méthode est que nous n’aurons plus à introduire de nouvelles échelles arbitraires. Une fois que nous aurons exprimé les constantes de couplage renormalisées en fonction des constantes de couplage nues, nous imposerons la condition :

$$\Lambda \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial \Lambda} = 0 \quad (1.125)$$

ce qui revient à supposer que les constantes de couplage nues de notre modèle ne dépendent pas de l’échelle à laquelle nous allons couper la théorie. Ici, \mathcal{G}_0 représente un des paramètres du modèle considéré.

Regardons maintenant comment nous pouvons appliquer ces idées au lagrangien de la théorie Φ^4 . Afin de renormaliser la constante de couplage, nous allons écrire la relation entre les constantes nue et renormalisée. De manière générale, nous avons :

$$g_0 = g[1 + \text{pôles}] \quad (1.126)$$

Nous pouvons faire ici un parallèle avec le lagrangien des contre-termes : dans le membre de droite, le terme en g représente la contribution à l’arbre, et le terme divergent⁷ sera issu des contributions en boucles (qui apparaissent dans le lagrangien sous la forme de contre-termes). Dans le cas de la renormalisation à la Wilson, les pôles doivent faire apparaître le cut-off de manière explicite. Nous choisissons ici d’utiliser une méthode de régularisation

⁷Ici on entend par divergent “qui diverge dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ ” ; en effet ici la théorie a déjà été régularisée.

qui sera développée dans la suite au chapitre 2 et qui préserve les symétries de notre modèle. Le résultat s'écrit :

$$g_0 = g \left[1 - \frac{3g}{2(4\pi)^2} \ln \Lambda^2 \right] \quad (1.127)$$

Ensuite, nous savons que la constante de couplage nue doit être indépendante de l'échelle de coupure à laquelle nous coupons la théorie, soit :

$$\Lambda \frac{dg_0}{d\Lambda} = 0 \quad (1.128)$$

En imposant cette condition à l'équation (1.127), nous obtenons finalement l'équation d'évolution pour la constante de couplage renormalisée g^8 :

$$\Lambda \frac{dg}{d\Lambda} = \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \quad (1.130)$$

Nous constatons alors que cette équation est identique à celle obtenue en renormalisant à la Gell-Mann et Low, et d'une manière beaucoup plus rapide.

En ce qui concerne la masse, nous commençons là aussi par écrire la relation entre m_0^2 et m^2 :

$$m_0^2 = m^2 [1 + \text{pôles}] \quad (1.131)$$

En utilisant toujours la même méthode de régularisation nous allons donner les expressions explicites pour les pôles :

$$m_0^2 = m^2 \left[1 + \frac{g}{2(4\pi)^2} \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \Lambda^2 \right) \right] \quad (1.132)$$

Nous pouvons noter qu'ici, un nouveau type de divergence fait son apparition ; des termes en Λ^2 viennent s'ajouter aux contributions en $\ln \Lambda^2$ qui étaient déjà présents lors de la renormalisation de la constante de couplage. Nous verrons dans la suite pourquoi ces divergences quadratiques sont si importantes, et pourquoi il convient de les traiter avec une

⁸Nous donnons ici un peu plus de détails concernant la manière d'obtenir l'équation (1.130). Si nous dérivons (1.127) par rapport à Λ , il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda \frac{dg}{d\Lambda} - \frac{3g\Lambda}{(4\pi)^2} \frac{dg}{d\Lambda} \ln \Lambda^2 - \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \\ &= \Lambda \frac{dg}{d\Lambda} - \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \end{aligned} \quad (1.129)$$

La raison pour laquelle nous pouvons supprimer le terme en $g \frac{dg}{d\Lambda}$ est que nous souhaitons rester à l'ordre à une boucle lors de notre développement. Or le terme en $\frac{dg}{d\Lambda}$ est d'ordre 2 en g , donc le terme que nous avons éliminé est un terme d'ordre supérieur que nous allons ignorer lors de notre analyse. Nous ferons de même dans la suite lorsque nous allons renormaliser la masse.

attention particulière. Une fois de plus, nous imposerons que la masse nue du lagrangien soit indépendante du cut-off, soit :

$$\Lambda \frac{dm_0^2}{d\Lambda} = 0 \quad (1.133)$$

Ce qui nous permet d'arriver finalement à l'expression suivante (toujours à une boucle) :

$$\Lambda \frac{dm^2}{d\Lambda} = \frac{g}{(4\pi)^2} (m^2 - \Lambda^2) \quad (1.134)$$

De manière assez surprenante, nous n'obtenons pas le même résultat qu'avec l'approche à la Gell-Mann et Low. Ceci est dû au fait que dans le cas précédent, nous avons utilisé la régularisation dimensionnelle pour supprimer les divergences, et cette méthode présente l'inconvénient de ne faire apparaître que les divergences logarithmiques. Ceci n'est pas important pour l'étude des théories de jauge, où les contributions quadratiques doivent s'annuler à la fin du calcul, mais si nous considérons des théories effectives basées sur des symétries globales il va falloir manipuler cette méthode avec beaucoup plus de précautions. Cependant, la méthode de Wilson nous permet de calculer les fonctions β pour notre modèle.

Maintenant que nous avons vu diverses méthodes pour dériver les équations du groupe de renormalisation, il nous reste à voir quels sont les comportements asymptotiques auxquels nous pouvons nous attendre pour la fonction β , avant de généraliser notre étude au cas où on a plusieurs paramètres couplés.

1.4.3 Discussion des différents comportements asymptotiques en fonction de la forme de la fonction β

Une fois que nous avons calculé les fonctions β pour les paramètres d'un modèle, nous allons nous en servir pour décrire le comportement des constantes de couplage sur un intervalle énergétique où la théorie des perturbations s'effondre. En fait, il existe quatre types de comportements de g_μ lorsque $\mu \rightarrow \infty$, qui correspondent à quatre formes différentes de la fonction β . Ces différentes formes sont représentées dans le diagramme ci-dessous :

Par définition, nous savons que :

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu) \quad (1.135)$$

et la solution de cette équation pourra donc s'écrire formellement :

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)} \quad (1.136)$$

Nous allons alors étudier un à un les différents cas en fonction de la forme générale de $\beta(g)$.

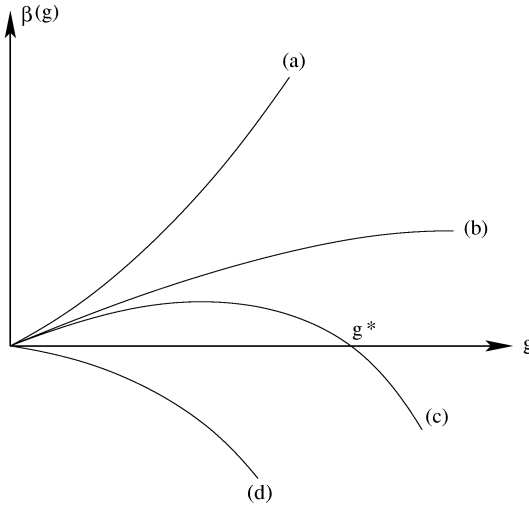


FIG. 1.7 – Représentation des différents comportements de la fonction β en fonction de la valeur de la constante de couplage g .

(a) Singularité à énergie finie

Dans ce premier cas, nous supposons que β est positive et croît suffisamment rapidement de telle sorte que l'intégrale (1.136) converge :

$$\int^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} < \infty \quad (1.137)$$

En utilisant l'équation (1.136), nous pouvons alors montrer qu'il existe nécessairement une valeur E_{∞} de l'énergie telle que $g_{E_{\infty}}$ devienne infinie :

$$E_{\infty} = \mu \exp \left(\int_{g_{\mu}}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} \right) \quad (1.138)$$

où μ est un point de renormalisation tel que $\mu \gg m$.

(b) Croissance continue

Dans ce cas, nous supposons que β est positive, mais qu'elle se comporte de telle manière que $\int^{\infty} dg/\beta(g)$ soit divergente. La constante de couplage g_E continue donc à augmenter lorsque $E \rightarrow \infty$ mais ne devient infinie que pour $E = \infty$.

(c) Existence d'un zéro à $g \neq 0$

Supposons ici que $\beta(g)$ soit positive pour des petites valeurs de g et qu'il existe un point

d'annulation de β pour une valeur particulière g^* . L'équation (1.136) impose donc que pour des valeurs croissantes de μ , g_μ sera croissante dans l'intervalle $[0, g^*]$ et décroissante pour $g_\mu > g^*$. De plus, indépendamment de la valeur initiale choisie, g_μ tendra vers g^* lorsque $\mu \rightarrow \infty$. Dans ce cas, on pourra étudier le comportement critique de g_μ pour les grandes échelles en linéarisant :

$$\beta(g) \rightarrow a(g^* - g) \quad (1.139)$$

Si nous supposons que $a > 0$, la solution de (1.139) sera alors donnée par :

$$g^* - g_\mu \propto \mu^{-a} \quad (1.140)$$

(d) Liberté asymptotique

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que $\beta(g)$ est positive pour les petites valeurs de g_μ et donc que g_μ s'éloigne de $g = 0$ lorsque μ croît. Si maintenant nous supposons que β est négative, près de l'origine on aura un comportement qui pourra se linéariser suivant :

$$\beta(g) \rightarrow -bg^n \quad (1.141)$$

avec $b < 0$. La résolution de l'équation (1.136) conduit alors à un comportement de g de la forme :

$$g_E = g_\mu \left[1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln \left(\frac{E}{\mu} \right) \right]^{-1/(n-1)} \quad (1.142)$$

Lorsque $E \rightarrow \infty$, la limite est indépendante de g_μ :

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln E]^{-1/(n-1)} \quad (1.143)$$

1.4.4 Extension au cas général où on a plusieurs constantes de couplage - linéarisation

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas d'une théorie qui ne contenait qu'une seule constante de couplage ; nous allons voir dans ce paragraphe comment les résultats précédents peuvent se généraliser dans le cas de théories avec plusieurs constantes de couplage. Supposons que notre théorie contienne plusieurs constantes de couplage $g^{(i)}$ que nous écrirons vectoriellement sous la forme g . En suivant la procédure décrite précédemment (au sens de Wilson par exemple), nous pouvons obtenir un ensemble d'équations du groupe de renormalisation qui s'écriront :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g^{(i)}(\Lambda) = \beta^i(g(\Lambda)) \quad (1.144)$$

où les fonctions β^i pourront dépendre de manière générale de toutes les constantes de couplage $g^{(i)}$. Dans de tels cas, le comportement asymptotique des constantes de couplage

pourra être beaucoup compliqué que ce que nous avons vu précédemment. Afin de donner des indications de réponse, nous allons considérer ce qui se passe au voisinage d'un point fixe. Supposons que nous connaissions un point fixe g^* du système, ce dernier est solution de l'équation :

$$\beta^i(g_*) = 0 \quad (1.145)$$

Au voisinage du point fixe, nous pouvons linéariser l'équation (1.144) :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} [g^{(i)}(\Lambda) - g_*^{(i)}] = \sum_n M_n^i [g^{(n)}(\Lambda) - g_*^{(n)}] \quad (1.146)$$

où la matrice M est définie par :

$$M_n^i \equiv \left[\frac{\partial \beta^i(g)}{\partial g^{(n)}} \right]_{g=g_*} \quad (1.147)$$

Nous pouvons décomposer la solution de (1.146) sur une base de vecteurs propres de la matrice M_n^i :

$$g^{(i)}(\Lambda) = g_*^{(i)} + \sum_n c_n V_n^i \Lambda^{\lambda_n} \quad (1.148)$$

où V_n^i est un vecteur propre de M avec une valeur propre associée λ_n :

$$\sum_k M_k^i V_n^k = \lambda_n V_n^i \quad (1.149)$$

et les c_n sont les coefficients du développement. L'équation (1.148) montre alors que les constantes de couplage approchent un point fixe pour $\mu \rightarrow \infty$ si et seulement si $c_n = 0$ pour tous les vecteurs propres qui vérifient $\lambda_n > 0$. Ainsi, les trajectoires qui sont attirées vers le point fixe dans le diagramme de flux appartiennent à une surface de dimension le nombre de valeurs propres négatives de M . Les tangentes à cette surface en g_* sont les vecteurs propres associés à des valeurs propres négatives. Les trajectoires qui n'appartiennent pas à cette surface pourront s'approcher du point fixe, mais seront finalement repoussées et vont soit diverger, soit se rapprocher d'un autre point fixe.

1.4.5 Comptage en puissances - Renormalisabilité d'une théorie

Dans l'histoire de la théorie quantique des champs, les théories les plus étudiées ont sans aucun doute été les théories de jauge, c'est-à-dire basées sur l'invariance sous un groupe de transformations locales. En effet, jusqu'à présent, les théories "fondamentales" décrivant les interactions élémentaires sont basées sur les groupes $U(1)$ pour l'interaction électromagnétique, $SU(2) \times U(1)$ pour les interactions électrofaibles et $SU(3)$ pour l'interaction forte. De plus, le modèle standard est lui aussi une théorie de jauge. De manière générale, nous avons tendance à supposer qu'une théorie fondamentale doit nécessairement être invariante sous

des transformations locales⁹. Toutes ces théories ont une propriété commune : elles sont toutes renormalisables. Dans la suite, nous allons voir ce qu'on entend par renormalisable et quelles sont les propriétés partagées par ces théories.

Dans le paragraphe 1.4.1, où nous avons renormalisé le lagrangien de la théorie en Φ^4 , nous avons été obligés d'introduire des contre-terms dans le lagrangien pour absorber les divergences qui apparaissent lors du calcul à une boucle. De manière analogue, si nous souhaitons renormaliser le lagrangien à deux boucles, nous allons partir du lagrangien à une boucle (avec les contre-terms) avec lequel nous générerons des contributions à deux boucles. Une fois encore, il va falloir introduire des contre-terms pour faire disparaître les nouvelles contributions divergentes qui vont apparaître. De manière générale, rien n'indique que les contre-terms à deux boucles soient identiques à ceux à une boucle et nous pouvons facilement imaginer qu'à chaque ordre de nouvelles contributions vont apparaître. Nous allons montrer ici que pour les théories dites renormalisables, le nombre de contre-terms qu'il va falloir introduire restera fini et ce indépendamment de l'ordre auquel nous considérerons la théorie. Nous pouvons alors faire les remarques suivantes :

- la renormalisation est une méthode que nous devons appliquer ordre par ordre à une théorie.
- à chaque ordre du développement en boucles, nous avons besoin d'introduire des contre-terms. A un ordre donné, nous pourrions donc renormaliser n'importe quelle théorie (en théorie, car en pratique les calculs peuvent devenir trop complexes pour pouvoir espérer les résoudre) en choisissant les contre-terms appropriés.
- il existe un ensemble de théories, appelées renormalisables, pour lesquelles nous n'avons besoin que d'un nombre fini de contre-terms pour absorber les divergences et ce indépendamment du nombre de boucles considérées. Nous allons donc donner les critères pour savoir si une théorie est renormalisable ou pas.

Considérons de manière très générale une théorie qui contient des interactions de différents types, notés i . Nous pouvons alors caractériser chaque interaction par le nombre n_{if} de champs de type f , ainsi que par le nombre d_i de dérivées agissant sur ces champs. Nous allons alors calculer le degré superficiel de divergence D des diagrammes de la théorie, qui va indiquer les divergences auxquelles nous devons nous attendre. De manière générale, les intégrales sur les moments que nous réaliserons lors des calculs en boucle se comporteront aux grandes impulsions comme :

$$\int^{\Lambda} k^{D-1} dk \quad (1.150)$$

Nous distinguons alors trois cas :

⁹Nous pouvons noter que dans le cas de l'interaction forte, les théories de basses énergies sont basées sur la symétrie chirale qui est une symétrie globale. Nous savons que de telles théories ne permettent pas une description aux hautes énergies, mais elles permettent de décrire la matière hadronique dans des domaines où nous ne connaissons pas de solution donnée par QCD, même avec l'utilisation du réseau. De manière générale, il n'est pas nécessaire de considérer des théories de jauge lorsque nous travaillons avec des théories effectives.

- $D = 0$: dans ce cas, nous avons une divergence en $\ln \Lambda$.
- $D > 0$: dans ce cas nous avons une divergence en Λ^D .
- $D < 0$: dans ce cas l'intégrale converge.

Pour calculer D de manière explicite, nous avons besoin de :

$$\begin{aligned} E_f &\equiv \text{nombre de lignes externes de type } f \\ N_i &\equiv \text{nombre de vertex de type } i \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons écrire le comportement asymptotique d'un propagateur $\Delta_f(k)$ sous la forme :

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f} \quad (1.151)$$

où s_f peut être considéré comme le spin de la particule¹⁰. Nous pouvons alors montrer que D est égal à :

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i \quad (1.152)$$

où Δ_i est un paramètre qui caractérise chaque interaction de type i , dont l'expression est donnée par :

$$\Delta_i = 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \quad (1.153)$$

La première remarque que nous pouvons formuler est que nous avons réussi à mettre D sous une forme telle que son expression est indépendante du nombre de lignes internes, mais ne dépend que du nombre des vertex, ainsi que de leur type. De plus, dans le cas où $\Delta_i \geq 0$, l'équation (1.152) fournit une limite supérieure pour D :

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) \quad (1.154)$$

D ne dépend alors que du nombre de lignes externes, c'est-à-dire du processus physique étudié. Dans ce cas il n'existe qu'un nombre fini de processus pouvant avoir un degré superficiel de divergence positif ou nul. Nous pouvons alors montrer que le nombre fini de divergences qui apparaissent peuvent être éliminées par une redéfinition d'un nombre fini de paramètres du modèle. C'est pour cette raison que de telles théories sont appelées renormalisables. Comme nous l'avons vu dans le cas de la physique statistique, nous pouvons aussi classer les termes d'interaction vis-à-vis de la renormalisation ; nous distinguons trois cas :

- $\Delta_i > 0$: l'interaction est dite super-renormalisable : plus nous rajoutons de ces termes dans des diagrammes en boucle et plus ces derniers vont avoir tendance à converger.
- $\Delta_i = 0$: dans ce cas les interactions sont dites renormalisables et le degré superficiel de divergence des diagrammes auxquels elles appartiennent ne dépend pas du nombre de celles-ci : dans ce cas nous n'aurons pas besoin d'introduire de contre-termes supplémentaires lorsqu'on augmente l'ordre du développement.

¹⁰Ceci n'est pas vrai dans le cas des particules vectorielles sans masse ou pour des particules vectorielles massives couplées à un courant conservé, où on a $s_f = 0$

- $\Delta_i < 0$: ce sont les interactions non renormalisables. Plus elles sont nombreuses dans un diagramme et plus celui-ci va diverger. Toute théorie contenant une interaction non renormalisable sera elle-même non renormalisable, car nous serons obligés de rajouter des contre-termes à chaque ordre supplémentaire du développement en boucles afin d'absorber les divergences.

Dans la suite, nous allons calculer les équations du groupe de renormalisation pour un modèle effectif chirale et tous les calculs seront réalisés à une boucle, donc nous n'aurons pas besoin de savoir si nous avons affaire à une théorie renormalisable.

Chapitre 2 Régularisation

Nous avons vu dans la première partie que dès que nous souhaitons renormaliser un modèle en théorie quantique des champs, la première étape est de régulariser les intégrales divergentes qui apparaissent dans les calculs en boucles. Dans ce deuxième chapitre, nous allons pour commencer présenter quelques méthodes de régularisation fréquemment utilisées dans la littérature ; après avoir passé en revue les avantages et les inconvénients de ces méthodes, nous serons ensuite amenés à définir une nouvelle prescription de coupure des intégrales qui permet de respecter l'invariance de jauge. Nous testerons la validité de notre méthode en l'appliquant à QED à 4 et 5 dimensions et nous montrerons dans chaque cas que les identités de Ward sont vérifiées après régularisation.

2.1 Introduction générale - Contexte

De manière générale, tous les modèles en théorie des champs sont basés sur l'invariance par rapport à des symétries ; le théorème de Noether permet alors de déduire les quantités et les courants conservés. Il existe deux types fondamentaux d'invariance : globale et locale. Bien que l'on croit qu'une théorie fondamentale des interactions élémentaires doive être une théorie de jauge (*i.e.* une théorie invariante sous un groupe de transformations locales), l'utilisation des symétries globales (par exemple la symétrie chirale) s'avère quant à elle centrale dès lors que l'on construit des théories effectives.

Lorsque nous faisons des calculs en boucles, les contributions générées sont la plupart du temps divergentes et nous devons trouver un moyen de les éliminer : c'est la régularisation. L'image la plus intuitive de la régularisation est donnée par l'introduction d'un cut-off imposé de manière naïve, c'est-à-dire que la borne supérieure de l'intégrale sur les impulsions est coupée pour des impulsions supérieures à une certaine énergie. Dans la suite, nous l'appellerons Λ . La partie infinie qui provenait des grandes impulsions se retrouve alors sous la forme d'un terme qui dépend explicitement du cut-off ; on aura de plus des termes correctifs en puissances de $1/\Lambda$ pour la partie finie.

Dans le contexte des théories effectives, nous serons amenés à considérer des particules

scalaires, de Dirac ou vectorielles (massives ou non massives). Les propagateurs de ces particules peuvent s'écrire :

$$\text{scalaires} \quad G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.1)$$

$$\text{Dirac} \quad G(k) = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} \quad (2.2)$$

$$\text{vectorielles sans masse} \quad G^{\mu\nu}(k) = \frac{k^\mu k^\nu / k^2 - g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{k^\mu k^\nu / k^2}{\lambda k^2 + i\epsilon} \quad (2.3)$$

$$\text{vectorielles massives} \quad G^{\mu\nu}(k) = \frac{k^\mu k^\nu / m^2 - g^{\mu\nu}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{k^\mu k^\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.4)$$

La forme du propagateur des particules vectorielles provient du fait que l'on a inclus un terme de Stueckelberg $\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ dans le lagrangien. De plus, nous considérerons dans la suite des vertex d'interaction à deux, trois et quatre points. A une boucle, les intégrales qui apparaîtront seront donc de la forme générale :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^{0,1,2,\dots} k^\mu k^\nu \dots}{(k^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2) \dots ((p-k)^2 - m_i^2)((p-k)^2 - m_{i+1}^2) \dots} \quad (2.5)$$

où la dimension n n'est pas fixée pour des raisons qui deviendront plus claires par la suite. Afin de simplifier l'évaluation de ce type d'intégrales, nous allons introduire les paramètres de Feynman. Ceux-ci permettent de factoriser le dénominateur en un produit de termes identiques. De manière explicite nous avons :

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_m} = (m-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_m \delta\left(\sum_{i=1}^m x_i - 1\right) \left(\sum_{i=1}^m A_i x_i\right)^{-m} \quad (2.6)$$

Par ailleurs, la présence de couplages dérivatifs entraîne l'apparition de coefficients en $k_\mu k_\nu \dots$ au numérateur. Il est alors commode d'utiliser la formule suivante :

$$\int d^n k (k \cdot q)^d f(k^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \text{ est impair} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (d-1)}{n(n+2)(n+4) \dots (n+d-2)} q^d \int d^n k k^d f(k^2) & \text{si } d \text{ est pair} \end{cases} \quad (2.7)$$

Les différentes formules que nous venons d'introduire nous permettent donc de restreindre l'étude des intégrales de la forme générale (2.5) à celles de la forme :

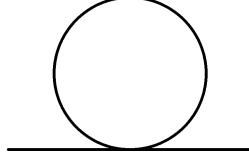
$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^a}{(k^2 - \Delta^2)^b} \quad (2.8)$$

où Δ contient les éventuels paramètres de Feynman. Les intégrales sur ces paramètres seront réalisées dans un second temps, mais ne posent aucun problème et seront donc passées sous silence dans la suite de ce chapitre.

Nous allons maintenant présenter quelques unes des méthodes de régularisation les plus couramment utilisées dans la littérature et nous discuterons pour chacune d'elles leurs avantages et leurs inconvénients.

2.2 Revue critique de quelques méthodes existantes

Une fois de plus, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie en Φ^4 ; la self-énergie du champ Φ à une boucle est donnée par le diagramme en tadpole suivant :



Nous avons donc à régulariser l'intégrale :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (2.9)$$

Malgré la simplicité du modèle, cette intégrale est un bon exemple car elle contient à la fois des divergences logarithmiques ($\propto \ln \Lambda^2$) et quadratiques ($\propto \Lambda^2$) dans le cut-off Λ . Comme nous le verrons dans la suite, les problèmes rencontrés avec les méthodes de régularisation surviendront systématiquement lorsque nous considérerons des intégrales contenant des divergences quadratiques.

Comme dans ce qui précède, nous allons nous placer dans l'espace de Minkowski, sauf indication contraire explicitement mentionnée. De plus il pourra être utile dans la suite de réexprimer les fractions qui apparaissent dans les propagateurs sous forme intégrale ; pour ceci, nous utiliserons la formule suivante :

$$\frac{1}{A^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-uA} \quad (2.10)$$

où Γ est la fonction d'Euler. Regardons maintenant comment on peut faire pour donner un sens à (2.9).

2.2.1 Régularisation dimensionnelle

La régularisation dimensionnelle [18] est sans aucun doute la méthode la plus utilisée : ceci est principalement dû à deux avantages : elle est particulièrement simple à mettre en œuvre et elle permet de préserver les symétries du modèle de manière systématique lorsque nous considérons des théories de jauge¹. Par contre, nous verrons que dans le cas de théories effectives basées sur des symétries globales, cette méthode s'avère incomplète et ne permet de générer que partiellement les parties divergentes (elle ne reproduit pas les divergences quadratiques de manière satisfaisante et nous devons la modifier quelque peu).

Le principe général de la régularisation dimensionnelle est d'évaluer les intégrales dans une dimension n non entière pour laquelle on a convergence. Le résultat fait alors apparaître la fonction Γ d'Euler. Une des propriétés de cette fonction est de posséder des pôles pour des

¹Dans toute la suite de ce manuscrit nous ne parlerons pas du cas particulier des anomalies.

valeurs paires de n : il suffira donc de réaliser un développement de la fonction autour de ses pôles pour obtenir la partie divergente. Dans cette partie, nous allons travailler dans un espace euclidien. Pour illustrer ce principe, commençons par considérer l'intégrale :

$$I = \int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + \Delta)^\alpha} \quad (2.11)$$

D'après (2.10), nous pouvons écrire² :

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-u\Delta} \int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} e^{-u\tilde{k}^2} \quad (2.14)$$

on calcule alors l'intégrale gaussienne :

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} e^{-u\tilde{k}^2} = \frac{1}{(4\pi u)^{n/2}} \quad (2.15)$$

d'où

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty du u^{\alpha-\frac{n}{2}-1} e^{-u\Delta} \quad (2.16)$$

par comparaison avec (2.10), il vient alors :

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + \Delta)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{n}{2}-\alpha} \quad (2.17)$$

Dans le cas de la théorie en Φ^4 , nous avons $\Delta = m^2$ et $\alpha = 1$, ce qui donne pour (2.17) :

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{\tilde{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(1 - n/2) m^{n-2} \quad (2.18)$$

Nous pouvons alors utiliser (2.13) afin de développer $\Gamma(1 - n/2)$ autour de son pôle en $n = 4$. Posons $n = 4 - 2\epsilon$ avec ϵ petit. L'expression précédente peut s'écrire :

$$\frac{m^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi} \right)^{-\epsilon} \Gamma(-1 + \epsilon) \quad (2.19)$$

²Par définition, la fonction Γ d'Euler est égale à :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty d\beta \beta^{z-1} e^{-\beta} \quad (2.12)$$

Nous pouvons alors montrer les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(z) = (z-1)!$ pour des valeurs entières de z
3. on peut développer la fonction Γ autour de ses pôles :

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon \psi(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \quad (2.13)$$

avec $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ et $\psi(1) = -\gamma \simeq -0,577215\dots$ où γ est appelé constante d'Euler-Mascheroni.

avec :

$$\left(\frac{m^2}{4\pi}\right)^{-\epsilon} \simeq 1 - \epsilon \ln \frac{m^2}{4\pi} + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\ln \frac{m^2}{4\pi}\right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.20)$$

$$\Gamma(-1 + \epsilon) \simeq -\frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon \psi(2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \quad (2.21)$$

Finalement, une fois régularisée, nous obtenons pour (2.18) :

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{\tilde{k}^2 + m^2} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left(1 + \epsilon \psi(2) - \epsilon \ln \frac{m^2}{4\pi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \quad (2.22)$$

Nous constatons que la partie divergente est cachée dans le terme en $1/\epsilon$. La régularisation dimensionnelle ne fait donc aucune différence entre les divergences quadratiques et logarithmiques qui sont toutes deux contenues dans ce terme.

La manière dont nous venons de réaliser le calcul est celle qui a déjà été utilisée dans le premier chapitre lorsque nous avons obtenu l'équation du groupe de renormalisation pour la masse dans le modèle en Φ^4 (voir partie 4, eq.(1.124)). Par contre, nous avons aussi vu qu'avec cette méthode nous n'obtenions qu'une partie de la fonction β (partie correspondant au terme logarithmique dans le cas où on utilise un cut-off Λ). La régularisation dimensionnelle est donc utile lorsqu'il s'agit de renormaliser un modèle (on n'a pas besoin de connaître la forme explicite de divergences), mais s'avère insuffisante pour établir les équations du groupe de renormalisation au sens de Wilson où il nous faudra connaître la forme des termes divergents de manière explicite³. Ici nous avons développé la fonction Γ autour de son pôle en $n = 4$, sans nous soucier des autres valeurs de n pour lesquelles la fonction diverge. Malheureusement, si nous souhaitons avoir des résultats corrects, il sera impossible de ne pas considérer ces divergences quadratiques, car ce sont elles qui vont principalement gouverner l'évolution des constantes de couplage dans les équations du groupe de renormalisation.

Afin de résoudre ce problème, certains auteurs ont déjà établi des moyens d'améliorer la méthode [19, 20, 21, 22]. Dans tous les cas, ils identifient les divergences quadratiques avec les pôles qui interviennent en $n = 2$ et les divergences logarithmiques avec les pôles en $n = 4$. Cette prescription a été utilisée pour l'étude de la transition de phase chirale [20, 23] (nous reviendrons sur l'intérêt des résultats obtenus par ces auteurs dans le troisième chapitre). Cependant, cette méthode, qui correspond à une identification directe entre les pôles de Γ et les divergences logarithmiques et quadratiques ne permet pas de générer tous les termes que nous pourrions rencontrer dans les théories effectives chirales. Nous allons ici donner un bref aperçu de cette méthode sur un exemple précis. Toujours dans le cadre de la renormalisation de la masse dans le modèle en Φ^4 , nous pourrions régulariser notre

³Une exception importante est celle des théories de jauge où les contributions quadratiques s'annulent à la fin des calculs et il ne restera que des divergences logarithmiques; dans ce cas la régularisation dimensionnelle conviendra parfaitement.

intégrale comme il suit (nous travaillons dans un espace euclidien) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + m^2} &= \frac{\Gamma(1 - n/2)}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{1 - n/2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{1 - n/2} [(2 - n/2) - (1 - n/2)] \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} \left[\frac{\Gamma(3 - n/2)}{1 - n/2} - \Gamma(2 - n/2) \right] \\
&= \frac{1}{1 - n/2} \frac{\Gamma(3 - n/2)}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} - \frac{1}{2 - n/2} \frac{\Gamma(3 - n/2)}{(4\pi)^{n/2} (m^2)^{1-n/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 - n/2} - \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2 - n/2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où nous nous sommes servis de (2.18) pour écrire la première égalité. Nous avons donc fait apparaître explicitement les pôles en $n = 2$ et $n = 4$ dans le développement de la fonction Γ . Ensuite, afin d'obtenir les équations du groupe de renormalisation au sens de Wilson, il faut introduire le cut-off Λ de manière explicite. Pour cela, les auteurs de [20, 21] proposent de réaliser l'identification suivante :

$$\frac{1}{1 - n/2} \longrightarrow \frac{\Lambda^2}{4\pi} \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{2 - n/2} \longrightarrow \ln \Lambda^2 \tag{2.25}$$

Ce qui permet d'obtenir pour la partie divergente de notre intégrale de départ :

$$\frac{1}{(4\pi)^2} (\Lambda^2 - m^2 \ln \Lambda^2) \tag{2.26}$$

Bien qu'un tel procédé puisse paraître arbitraire, les auteurs parviennent à préserver les symétries de leur modèle *via* cette identification. Cependant, bien que les résultats semblent être cohérents, nous ne voyons pas jusqu'ici pourquoi nous devrions évaluer une partie de nos intégrales en dimension 2 alors que les résultats physiques sont attendus en dimension 4. Nous allons maintenant donner des pistes qui permettent de répondre à cette question [22]. Commençons par réexprimer notre intégrale de départ comme une intégrale gaussienne :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-n/2} e^{-\alpha m^2} \tag{2.27}$$

L'intégrale sur le paramètre α fait apparaître deux zones potentiellement dangereuses de divergence :

1. la région infrarouge $\alpha \rightarrow \infty$ produira des divergences pour $n \leq 2$ si nous voulons faire tendre la masse vers zéro. Nous ne nous placerons pas dans ce cas particulier dans la suite.
2. la région ultraviolette $\alpha \rightarrow 0$, insensible à la masse, produira des singularités lorsque $n \geq 2$.

Nous allons donc introduire un cut-off au niveau de la région ultraviolette de nos intégrales afin de couper la physique des courtes distances; notre problème va alors consister à évaluer⁴ :

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\alpha \alpha^{-n/2} e^{-\alpha m^2} \quad (2.34)$$

Nous pouvons alors intégrer deux fois par parties et obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{m^{n-2}}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{2}{n-2} \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^{n/2} e^{-m^2/\Lambda^2} - \right. \\ \left. \frac{4}{(n-2)(n-4)} \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^{n-4} e^{-m^2/\Lambda^2} + \frac{4}{(n-2)(n-4)} \int_{m^2/\Lambda^2}^{\infty} dx x^{2-n/2} e^{-x} \right\} \quad (2.35) \end{aligned}$$

Nous allons réécrire l'équation précédente dans la limite où $\Lambda/m \gg 1$ et où n est proche de 4; nous obtenons :

$$\frac{m^{n-2}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{n-2} \left\{ (\Lambda/m)^{n-2} - (\Lambda/m)^{n-4} + \frac{2}{n-4} (1 - (\Lambda/m)^{n-4}) + \gamma + \dots \right\} \quad (2.36)$$

⁴Notons ici que cette réécriture consiste en fait à associer à la fonction Γ une fonction dite Γ incomplète suivant :

$$\Gamma(z) \implies \Gamma(z, \Lambda^{-2}) \quad (2.28)$$

où $\Gamma(z, \epsilon)$ est par définition :

$$\Gamma(z, \epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau \quad (2.29)$$

et nous allons pouvoir utiliser le développement de la fonction incomplète $\Gamma(z, \epsilon)$ qui s'écrit :

$$\Gamma(z, \epsilon) = \Gamma(z) + \epsilon^z \left(-\frac{1}{z} + \frac{\epsilon}{1+z} - \frac{\epsilon^2}{2(2+z)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \quad (2.30)$$

En particulier, nous aurons :

$$\Gamma(0, \epsilon) = (-\gamma - \ln \epsilon) + \epsilon - \frac{\epsilon^2}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.31)$$

$$\Gamma(-1, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + (-1 + \gamma + \ln \epsilon) - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{12} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.32)$$

$$\Gamma(-2, \epsilon) = \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln \epsilon}{2} \right) + \frac{\epsilon}{6} - \frac{\epsilon^2}{48} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.33)$$

et nous générerons bien les divergences quadratique et logarithmique une fois que nous aurons fait le remplacement $\epsilon \rightarrow m^2/\Lambda^2$ (qui apparaît naturellement à la borne inférieure de l'intégrale au cours des calculs).

En particulier, pour $n = 4$, l'intégrale est finalement régularisée en :

$$\frac{m^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{m^2} + \gamma - 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right\} \quad (2.37)$$

En particulier nous retrouvons bien le résultat donné en (2.26). Nous verrons dans la suite que ce résultat préserve les symétries des modèles que nous étudions. Nous voyons alors que grâce au facteur de coupure, le pôle en $n = 2$ s'est traduit par un terme quadratiquement divergent, alors que le pôle en $n = 4$ s'est traduit par un terme en $\ln \Lambda^2$. Le fait qu'une divergence en dimension $n = 2$ puisse apparaître lorsque nous faisons les calculs en $n = 4$ peut paraître étonnant, mais ce calcul permet de voir comment ces divergences apparaissent. Ceci peut *a posteriori* justifier la correspondance donnée par Harada *et al.*⁵, sachant que la méthode développée par ces auteurs ne permet pas de générer toutes les intégrales que nous utiliserons par la suite.

2.2.2 Pauli-Villars

Nous allons présenter ici la méthode de régularisation de Pauli et Villars [24]. Cette méthode consiste à rajouter une particule supplémentaire pour chaque particule présente dans l'action, qui possède les mêmes nombres quantiques mais dont la masse est différente ; c'est cette nouvelle masse qui servira de cut-off à la théorie. Cette méthode a l'avantage de préserver l'invariance de jauge de la théorie, ce qui peut se lire directement sur l'action. En effet, nous rajoutons des termes qui ont exactement la même structure que les termes déjà présents. De plus, la signification physique des particules virtuelles est évidente (leur masse joue le même rôle que l'échelle Λ lorsqu'on n'a qu'une seule particule virtuelle).

Nous allons appliquer la méthode à la théorie en Φ^4 . L'action peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{g}{4!} \Phi^4 \right\} \\ &\equiv \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + V(\Phi) \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous rajoutons alors dans l'action des termes qui contiennent une particule virtuelle ψ avec une masse $M \gg m$:

$$S[\Phi, \psi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - M^2 \psi^2) + V(\Phi + \psi) \right\} \quad (2.39)$$

⁵La méthode développée par les auteurs de [20, 21] s'applique parfaitement dans le cas du modèle HLS (Hidden Local Symmetry) où ils ont utilisé la méthode du champ de fond afin de simplifier les calculs en boucles. Par contre, ils travaillent dans le cadre d'une théorie de jauge et la table de correspondance qu'ils donnent s'avère être insuffisante pour régulariser toutes les intégrales qui apparaîtront dans le cas de notre théorie effective (*c.f.* chapitre 3).

L'action $S[\Phi, \psi]$ va générer des termes qui auront la même structure que les termes initiaux, mais dont les constantes de couplage et les propagateurs seront modifiés. Le propagateur du champ scalaire s'écrit maintenant (dans un espace euclidien) :

$$\frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{1}{k^2 + M^2} = \frac{M^2 - m^2}{(k^2 + m^2)(k^2 + M^2)} \quad (2.40)$$

En ce qui concerne la contribution à une boucle pour la renormalisation de la masse, nous avons un terme proportionnel à :

$$\int d^4k \frac{1}{k^2 + m^2} \simeq \Lambda^2 \quad \text{lorsque } \Lambda \longrightarrow \infty \quad (2.41)$$

La même boucle évaluée avec l'expression du nouveau propagateur (2.40) est :

$$\int d^4k \frac{M^2 - m^2}{(k^2 + m^2)(k^2 + M^2)} \simeq \ln \Lambda^2 \quad \text{lorsque } \Lambda \longrightarrow \infty \quad (2.42)$$

nous voyons donc que nous avons réussi à abaisser le degré de divergence de notre intégrale, mais elle reste toujours divergente (par contre, ce terme aurait suffi si nous nous étions intéressés à la constante de couplage qui ne diverge que logarithmiquement). Il va donc falloir introduire une seconde particule virtuelle afin de faire converger les intégrales; de manière générale, chaque nouvelle particule introduite fera baisser le degré de divergence de nos intégrales. Avec deux particules supplémentaires dans l'action, le propagateur pour les particules scalaires va s'écrire :

$$\frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{c_1}{k^2 + M_1^2} - \frac{c_2}{k^2 + M_2^2} \propto \frac{1}{k^6} \quad (2.43)$$

cette fois-ci, aux grandes impulsions l'intégrale va se comporter comme $\int dk \frac{k^3}{k^6}$ et va donc converger. Nous pouvons donc ainsi régulariser la théorie. Afin de s'affranchir des particules virtuelles à la fin des calculs, nous pouvons utiliser le théorème de découplage qui prédit que les particules (virtuelles) lourdes auront une influence négligeable sur la physique des basses énergies et donc sur notre modèle initial. Nous pouvons donc simplement supprimer ces particules à la fin des calculs sans changer les résultats de manière significative.

Comme nous venons de le voir, la méthode de Pauli et Villars présente l'avantage de conserver de manière naturelle les symétries du problème. De plus, la signification physique de la méthode avec une seule masse est compréhensible, mais devient beaucoup moins intuitive dans le cas où nous en avons plusieurs; il n'y a *a priori* aucune raison physique pour introduire plusieurs cut-off successifs à des échelles différentes (même si formellement nous pouvons toujours faire disparaître ces modes à la fin des calculs). De plus, cette méthode conduit à des calculs très complexes dans le cas où de nombreuses contributions qui divergent contiennent des termes quadratiques en Λ , ainsi que lorsque nous avons des champs de jauge.

2.2.3 Le cut-off naïf

La méthode du cut-off naïf (que nous considérons ici à quatre dimensions) est certainement la plus intuitive de toutes : plutôt que d'intégrer sur les impulsions entre 0 et ∞ , nous limitons l'intégration à une échelle maximale Λ . Schématiquement :

$$\int_0^\infty dk \dots \implies \int_0^\Lambda dk \dots \quad (2.44)$$

Dans ce cas, nous avons bien évidemment la présence explicite du cut-off dans l'intégrale régularisée. En effet, si nous considérons l'intégrale de référence (2.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{div} &= \int_{k^2 < \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\Lambda dk \left(k - \frac{m^2 k}{k^2 + m^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nous voyons bien apparaître les divergences en Λ^2 et $\ln \Lambda^2$. Malheureusement, dans le cas de la théorie en Φ^4 , nous ne disposons pas d'identités de Ward à vérifier pour voir si la méthode de régularisation préserve bien les symétries du modèle ; cependant, en appliquant cette méthode pour régulariser la self-énergie du photon dans le cas de QED, nous pouvons montrer que nous obtenons une contribution longitudinale pour l'expression du propagateur à une boucle et donc que nous brisons les identités de Ward et par conséquent la symétrie $U(1)$ du modèle. De plus, l'expression que nous allons obtenir pour la fonction β dans le cas de la masse sera différente de (1.98) calculée dans le premier chapitre, donc les deux méthodes ne sont pas équivalentes. Nous préférons bien évidemment utiliser la méthode qui préserve les symétries du modèle.

2.2.4 Le temps propre

De même que pour le cut-off naïf, la méthode du temps propre est aussi une méthode de régularisation faisant apparaître un paramètre de coupure Λ de manière explicite. Cette méthode a été introduite pour la première fois par Schwinger [25] et nous pouvons trouver aujourd'hui plusieurs formulations de cette dernière. Nous présentons ici la version développée par Zinn-Justin dans [26]. La première étape est d'introduire le paramètre τ dit de temps propre en réécrivant les propagateurs qui apparaissent dans les boucles suivant :

$$\frac{\Gamma(n)}{(k^2 + m^2)^n} = \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau(k^2 + m^2)} \quad (2.46)$$

Une fois le propagateur réexprimé sous forme exponentielle, nous introduisons alors le paramètre de coupure Λ (comme dans le cas de la régularisation dimensionnelle, ce cut-off supprime les contributions de haute énergie) :

$$\int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau(k^2+m^2)} \longrightarrow \int_{1/\Lambda^2}^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau(k^2+m^2)} \quad (2.47)$$

Présentée sous cette forme, cette méthode brise les symétries du modèle. Cependant, ce problème peut être résolu dans le cas où nous connaissons des identités de Ward car celles-ci nous donnent des contraintes sur la forme générale du résultat que nous devons obtenir. Dans le cas de QED par exemple, cette méthode génère une partie longitudinale ainsi qu'une partie transverse pour la fonction de corrélation du photon. Or l'invariance sous $U(1)$ impose un photon sans masse. Il suffit alors d'imposer que la partie longitudinale soit nulle. Cette manière de procéder possède deux inconvénients : le premier est que dans le cas où nous ne connaissons pas d'identités de Ward pour notre modèle, nous n'avons pas de conditions qui nous permettent de contraindre notre résultat. De plus, si nous considérons toujours le cas de QED, les calculs avec le temps propre montrent que le propagateur régularisé du photon sera égal à :

$$\Pi^{\mu\nu}(k^2) = f_L(k^2) \Lambda^2 L^{\mu\nu} + f_T(k^2) \ln \Lambda^2 T^{\mu\nu} \quad (2.48)$$

où $L^{\mu\nu}$ et $T^{\mu\nu}$ sont les tenseurs de polarisation longitudinaux et transverse. En imposant $f_L(k^2) = 0$, nous retrouvons bien une expression transverse, avec la présence d'une divergence en $\ln \Lambda^2$, comme nous nous y attendons pour une théorie de jauge (dans ce cas en effet les divergences sont nécessairement logarithmiques). Par contre, et c'est le deuxième point, si la régularisation de temps propre avait généré des divergences en Λ^2 dans le terme transverse, nous n'aurions pas eu d'identité de Ward pour éliminer ce terme. Ceci est d'autant plus important que dans la suite, nous travaillerons avec une théorie effective qui ne sera pas une théorie de jauge et nous devons être sûrs que la méthode de régularisation génère bien des divergences dont la forme respectera les symétries du modèle.

Nous allons montrer les limites de la régularisation de temps propre sur un dernier exemple. Considérons les deux intégrales suivantes :

$$A = \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} \quad (2.49)$$

$$B = \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} + \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^2} \quad (2.50)$$

Formellement, la propriété d'additivité des intégrales nous permet d'écrire l'égalité $A = B$. Nous pouvons donc raisonnablement nous attendre à ce que les parties divergentes après régularisation soient elles aussi égales. Cependant, après régularisation avec la méthode du temps propre (où nous passons dans un espace euclidien pour faire les calculs), nous obtenons pour les parties divergentes :

$$A_{div} = -\frac{2}{(4\pi)^2} (\Lambda^2 - m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.51)$$

$$B_{div} = -\frac{2}{(4\pi)^2}(\Lambda^2 - 2m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.52)$$

La régularisation du temps propre brise donc l'égalité $A_{div} = B_{div}$. Une fois de plus, ce résultat n'est pas acceptable car le résultat final ne doit pas dépendre de la manière dont nous formulons les propagateurs des particules. Nous pouvons de plus noter qu'il n'y a aucune raison pour que les cut-off introduits dans des intégrales différentes aient la même signification physique ; il paraîtrait plus astucieux d'introduire une échelle au début du calcul que nous pouvons garder pour toutes les intégrales que nous aurons à calculer.

Dans ce qui suit, nous allons donc proposer une nouvelle méthode permettant d'exprimer les parties divergentes qui apparaissent dans les calculs en fonction d'un paramètre de coupure de manière consistante avec les propriétés de symétrie de nos théories effectives.

2.3 Construction d'une nouvelle méthode de régularisation

Comme nous venons de le voir, les seules méthodes de régularisation qui permettent de préserver les symétries (dans certains cas) sont Pauli-Villars et la régularisation dimensionnelle. Malheureusement, dès que nous souhaitons réaliser des calculs contenant des couplages dérivatifs, la méthode de Pauli et Villars se montre extrêmement lourde à mettre en œuvre ; de plus, elle est très inconfortable lorsque nous avons des divergences quadratiques car alors il faut introduire beaucoup de nouveaux termes dans l'action. D'un autre côté, la simplicité des calculs menés avec la régularisation dimensionnelle a fortement contribué à son succès. Mais de toutes les méthodes présentées dans la partie précédente, celle-ci est aussi la moins intuitive quand à sa signification physique, car tous les termes divergents sont cachés dans le terme en $1/\epsilon$ qui apparaît lorsque nous développons autour de la dimension $n = 4$ (ou $n = 2$ suivant les cas). De plus, et c'est notre principal souci, si nous souhaitons renormaliser un modèle au sens de Wilson, nous avons besoin de connaître la forme explicite des contributions divergentes en fonction du cut-off Λ . Evidemment, la régularisation dimensionnelle masque ce comportement explicite.

Nous avons donc cherché à mettre en place une méthode⁶ qui permette d'exprimer les divergences de la théorie aux grandes impulsions en fonction de $\ln \Lambda^2$ et des puissances de Λ . De plus, les théories auxquelles nous voulons appliquer notre méthode (en vue d'établir les équations du groupe de renormalisation dans la suite) contiennent des particules scalaires, des fermions et des vecteurs. Les corrections à une boucle qui peuvent être générées pour la fonction à deux points sont donc :

⁶Cette méthode a fait l'objet d'une publication à paraître dans Nuclear Physics A [27].

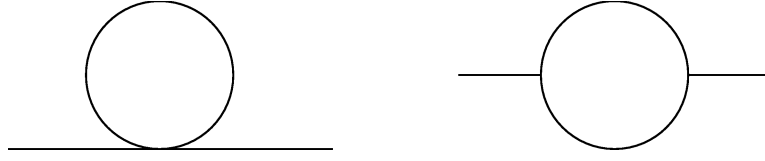


FIG. 2.1 – Corrections à une boucle pour la fonction à deux points. Les particules peuvent être des scalaires, des fermions ou des vecteurs.

Le problème se réduit alors à trouver une manière de couper les intégrales qui apparaîtront dans nos calculs sous la forme :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^a}{[k^2 - m^2]^b} \quad (2.53)$$

où m est une "masse effective" pouvant contenir des paramètres de Feynman, $a = 0, 2, 4, 6$ et $b \in [0, 4]$. L'idée principale est la suivante : plutôt que de calculer toutes les intégrales séparément, nous allons partir d'une intégrale de référence (judicieusement choisie) dont nous déterminerons la partie divergente. Ensuite, nous générerons toutes les autres à partir du résultat obtenu. Cette prescription présentera alors l'avantage de n'avoir besoin d'introduire le cut-off qu'une seule fois au cours du calcul et de conserver ce dernier dans la suite. Pour ceci, nous choisissons l'intégrale de départ :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (2.54)$$

dans laquelle nous introduisons deux paramètres arbitraires α et β de manière à définir :

$$I(\alpha, \beta) \equiv \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{1}{\alpha k^2 - \beta m^2} \quad (2.55)$$

Nous laissons la dimension n de l'intégrale indéterminée pour l'instant ; ce choix deviendra plus clair par la suite. Nous pouvons alors calculer la partie divergente de cette intégrale d'après (2.37)⁷ :

$$I_{div}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha^{-n/2}}{(4\pi)^2} (\Lambda - \beta m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.56)$$

De manière générale, les dérivées successives de $I(\alpha, \beta)$ par rapport à α et β permettent de générer de nouvelles intégrales primitivement divergentes suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{1}{\alpha k^2 - \beta m^2} & \xrightarrow{\partial/\partial\alpha} & \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{-k^2}{(\alpha k^2 - \beta m^2)^2} \\ \partial/\partial\beta \downarrow & & \\ \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{m^2}{(\alpha k^2 - \beta m^2)^2} & & \end{array} \quad (2.57)$$

⁷Nous pouvons choisir indifféremment n'importe quelle méthode parmi celle présentées précédemment car elles donnent toutes le même résultat sur cette intégrale précise.

Nous voyons que les dérivées partielles par rapport à α augmentent le degré du numérateur et du dénominateur d'un facteur 2 et 1 respectivement, alors que celles par rapport à β augmentent le degré du dénominateur d'un facteur 1. Si nous introduisons les notations :

$$\mathcal{I}_{a,b}(\alpha, \beta) \equiv \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k^a}{(k^2 - m^2)^b} \quad (2.58)$$

nous pouvons généraliser le diagramme précédent suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{a,b}(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\partial/\partial\alpha} & -\mathcal{I}_{a+2,b+1}(\alpha, \beta) \\ \partial/\partial\beta \downarrow & & \\ m^2 \mathcal{I}_{a,b+1}(\alpha, \beta) & & \end{array} \quad (2.59)$$

Finalement, une fois que nous aurons généré toutes les intégrales qui nous intéressent, nous obtiendrons une expression qui va dépendre des paramètres α, β ainsi que de la dimension n du problème. Etant donné que nous avons introduit les paramètres α et β afin de déduire les intégrales les unes des autres, nous les prendrons tous les deux égaux à 1 à la fin du calcul. De plus, afin de générer les divergences de manière à préserver les symétries du problème, la dimension n sera prise égale à 4 lorsqu'elle apparaît devant des termes en $\ln \Lambda^2$ et égale à 2 lorsqu'elle apparaît devant des termes en Λ^2 (ceci est fait en accord avec le traitement des deux types de divergences que nous avons présenté dans la partie sur la régularisation dimensionnelle). Une table donnant les parties divergentes de toutes les intégrales du type (2.53) est donnée en annexe B.

Afin de voir comment utiliser cette méthode de manière explicite, nous allons l'appliquer sur deux exemples : dans le premier, nous reprendrons le calcul des deux intégrales A et B définies en (2.49) et (2.50), ce qui nous permettra de montrer que cette fois-ci la méthode préserve l'additivité des intégrales ; dans le deuxième exemple nous considérerons une intégrale plus complexe contenant des termes en $k^\mu k^\nu$ provenant de couplages dérivatifs.

A l'aide de la définition de $I(\alpha, \beta)$, nous pouvons réécrire les intégrales A et B en fonction de $I(\alpha, \beta)$ et de ses dérivées partielles. En effet, nous avons :

$$A = -\frac{\partial}{\partial\alpha} I(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=1} \quad (2.60)$$

$$B = I(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=1} + \frac{\partial}{\partial\beta} I(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=1} \quad (2.61)$$

Nous pouvons de plus montrer de manière évidente que :

$$I(\alpha, \beta) = \alpha^{-n/2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - \beta m^2} = \alpha^{-n/2} I(1, \beta) \quad (2.62)$$

et l'intégrale $I(1, \beta)$ est régularisée d'après (2.56) selon :

$$I_{div}(1, \beta) = -\frac{1}{(4\pi)^2} (\Lambda^2 - \beta m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.63)$$

d'où nous déduisons :

$$I_{div}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha^{-n/2}}{(4\pi)^2}(\Lambda^2 - \beta m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.64)$$

Nous pouvons alors calculer :

$$A_{div} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{n}{2} \Lambda^2 - \frac{n}{2} m^2 \ln \Lambda^2 \right) \quad (2.65)$$

$$B_{div} = -\frac{1}{(4\pi)^2}(\Lambda^2 - 2m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.66)$$

et nous prenons finalement $n = 4$ devant les termes en $\ln \Lambda^2$ et $n = 2$ devant les termes en Λ^2 , ce qui permet de retrouver l'égalité $A = B$ après régularisation. Nous pouvons de plus montrer que l'additivité des intégrales est préservée pour toutes les intégrales du type (2.5) et ce indépendamment de la forme sous laquelle nous les écrivons. Cependant, il reste une subtilité relative à l'évaluation des intégrales contenant des couplages dérivatifs et nous allons maintenant donner un exemple du fonctionnement de notre méthode dans un tel cas. Considérons l'intégrale suivante :

$$C^{\mu\nu} = \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \quad (2.67)$$

En utilisant l'équation (2.7) et le diagramme (2.59), nous pouvons nous affranchir des termes en $k_\mu k_\nu$ au numérateur et réexprimer (2.67) suivant :

$$C^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k^4}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{g^{\mu\nu}}{2n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} I(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=1} \quad (2.68)$$

La partie divergente de l'expression précédente peut alors se déduire de celle donnée en (2.56) ; nous pouvons remarquer que le cut-off n'est introduit qu'une seule fois dans les calculs et garde donc la signification que nous lui avons donnée au moment où nous l'avons introduit. Pour l'instant, nous laissons de plus n sous une forme indéterminée et nous avons pour la partie divergente :

$$C_{div}^{\mu\nu} = -\frac{(n+2)g^{\mu\nu}}{8(4\pi)^2}(\Lambda^2 - m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.69)$$

Il ne nous reste plus qu'à nous affranchir de la dimension dans cette expression pour aboutir au résultat souhaité. Toujours par analogie avec ce qui a été fait avec la régularisation dimensionnelle, nous continuerons à associer les divergences logarithmiques à la dimension

$n = 4$ et les divergences quadratiques à la dimension $n = 2^8$.

$$C_{div}^{\mu\nu} = -\frac{g^{\mu\nu}}{4(4\pi)^2}(2\Lambda^2 - 3m^2 \ln \Lambda^2) \quad (2.70)$$

Finalement, nous avons mis en place une méthode permettant d'exprimer les parties divergentes des intégrales en boucles en fonction d'un cut-off Λ . La suite de ce chapitre sera consacré à l'application de notre méthode à divers modèles afin de tester sa validité et notamment vérifier qu'elle préserve certaines propriétés de symétries de nos modèles (*a priori*, seul le problème des anomalies serait susceptible de poser problème mais il s'agit d'une propriété intrinsèque aux théories chirales).

2.4 Application de la méthode à quelques exemples

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à appliquer notre méthode dans deux cas précis, QED à 4 et à 5 dimensions. Nous allons ainsi pouvoir observer explicitement comment ces deux théories de jauge se régularisent et déterminer dans le second cas l'évolution de la constante de couplage (l'intérêt des dimensions supplémentaires sera discuté lorsque nous introduirons le modèle). L'application à une théorie effective basée sur des symétries globales sera discutée dans le troisième chapitre consacré à l'étude de la restauration de la symétrie chirale.

2.4.1 QED

Afin de voir que notre méthode préserve bien les propriétés de symétrie, le cas le plus simple à étudier est QED qui est invariante sous le groupe de jauge $U(1)$.

Une des propriétés fondamentales d'une théorie de jauge est que nous pouvons établir un ensemble d'équations différentielles qui sont la conséquence directe de l'invariance de la théorie sous un certain groupe de transformations locales : les identités de Ward. Voyons comment elles s'écrivent dans le cas de QED⁹. Le lagrangien de QED se met sous la forme :

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{inv} + \mathcal{L}' \quad (2.71)$$

⁸Nous pouvons faire ici une remarque importante : notre but ici n'est pas de montrer de manière générale que notre méthode de régularisation est valable pour toutes les théories : mises à part les méthodes où on peut voir directement sur l'action qu'elles préservent les symétries du modèle, il est extrêmement difficile de le montrer dans le cas général. Notre démarche a donc été de définir un certain nombre de propriétés que devrait vérifier une méthode de régularisation préservant les symétries et de supposer par la suite que si ces propriétés sont vérifiées, alors notre méthode préservera bien les symétries. Faute de preuve formelle, le choix des propriétés est donc très important et nous avons choisi l'additivité des intégrales, deux identités de Ward pour QED et QED à 5 dimensions et le théorème de Goldstone dans un modèle effectif chirale. Ces trois exemples nous donnent de fortes indications sur la validité intrinsèque de la méthode.

⁹Les identités de Ward sont en réalité des identités sur la fonctionnelle génératrice du modèle que nous considérons. Il existe donc *a priori* une infinité de relations qui devraient être vérifiées par les fonctions de Green à deux, trois, quatre points...

où

$$\mathcal{L}_{inv} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (2.72)$$

est la partie invariante du lagrangien sous des transformations du groupe $U(1)$ et

$$\mathcal{L}' = -\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.73)$$

est le terme de Stueckelberg qui permet de réaliser la quantification canonique du champ vectoriel. Le paramètre λ est le paramètre de fixation de jauge, ψ est le champ de l'électron et A_μ celui du photon dont le terme cinétique est défini à partir de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Par définition, la fonctionnelle génératrice est :

$$Z(j, \bar{\eta}, \eta) = N \int [dA \, d\bar{\psi} \, d\psi] \exp \left(iS + i \int d^4x (j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right) \quad (2.74)$$

où $S = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}$ est l'action, N un coefficient de normalisation et j^μ , η et $\bar{\eta}$ sont des sources externes. Les lois de transformation des champs sous des variations infinitésimales de $U(1)$ s'écrivent :

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (2.75)$$

$$\delta \psi = ie\alpha\psi \quad (2.76)$$

Les identités de Ward sont alors obtenues en imposant l'invariance de la fonctionnelle génératrice de QED sous ces transformations. Plus précisément, nous pouvons montrer que Z doit vérifier l'égalité suivante :

$$\lambda \square \partial^\mu \frac{\delta Z}{\delta j^\mu} + i(\partial^\mu j_\mu)Z + ie \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) Z = 0 \quad (2.77)$$

Notons qu'il existe plusieurs formulations des identités de Ward. En ce qui nous concerne, nous allons réécrire (2.77) pour la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green propres car c'est *via* celle-ci que nous allons déduire les propriétés utiles dans la suite. La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green propres est définie par :

$$\Gamma = -iW - \int d^4x (j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \quad (2.78)$$

avec $W = \ln Z$ la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes. L'expression (2.77) peut alors se réécrire sous la forme :

$$\lambda \square \partial^\mu A_\mu - \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + ie \left(\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \psi \frac{\delta}{\delta \psi} \right) \Gamma = 0 \quad (2.79)$$

Nous pouvons remarquer que cette équation est très générale et que des conditions peuvent tout à fait être obtenues pour les fonctions de Green à n points et à l'ordre à l boucles. Cependant, dans ce qui va suivre, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions de

corrélations à 2 et 3 points à l'ordre à une boucle, car ce sont ces dernières qui nous seront utiles pour déterminer les équations du groupe de renormalisation dans la troisième partie.

Transversalité de la fonction de Green à deux points du photon

La première relation à laquelle nous allons nous intéresser porte sur la fonction de Green propre à deux points du champ vectoriel (le photon) ; cette fonction est définie par :

$$\Gamma^{(2)\mu\nu}(x-y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} \Big|_{(A=\psi=\bar{\psi}=0)} \quad (2.80)$$

Nous pouvons remarquer que $\Gamma^{(2)\mu\nu}(x-y)$ est la fonction à deux points contenant les corrections radiatives à tous les ordres. En dérivant fonctionnellement l'équation (2.79) par rapport à $\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}$ et en prenant la transformée de Fourier, nous pouvons alors montrer que :

$$p_\mu \Gamma^{(2)\mu\nu}(p) = -\lambda p^\nu p^2 \quad (2.81)$$

En séparant les termes classiques des corrections radiatives, nous avons alors :

$$\Gamma^{(2)\mu\nu}(p) = \Delta^{(2)\mu\nu}(p) + \hat{\Delta}^{(2)\mu\nu}(p) \quad (2.82)$$

où $\Delta^{(2)\mu\nu}(p)$ est la fonction de Green 'classique' alors que $\hat{\Delta}^{(2)\mu\nu}(p)$ contient toutes les corrections radiatives (nous nous limiterons ici à l'ordre à une boucle). Si nous reprenons l'expression explicite du propagateur du photon :

$$\Delta_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \quad (2.83)$$

l'identité (2.81) est trivialement vérifiée. Nous en déduisons alors simplement d'après (2.82) que la fonction de corrélation du photon à une boucle doit impérativement vérifier l'équation :

$$p_\mu \hat{\Delta}^{(2)\mu\nu}(p) = p_\mu (\Gamma^{(2)\mu\nu}(p) - \Delta^{(2)\mu\nu}(p)) = 0 \quad (2.84)$$

Finalement, $\hat{\Delta}^{(2)\mu\nu}(p)$ doit bien être proportionnelle au tenseur de polarisation transverse $T^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu}$. Nous venons donc de démontrer que la transversalité du photon à une boucle est une conséquence directe de l'invariance de jauge (et par conséquent des identités de Ward). Bien que cette condition soit automatiquement vérifiée par le lagrangien non régularisé, un moyen de savoir si notre méthode de régularisation préserve bien les symétries est de voir si cette propriété est satisfaite par la fonction de Green à deux points une fois que la théorie est régularisée. C'est ce que nous allons faire maintenant de manière explicite. De manière générale, la self-énergie d'une particule vectorielle peut s'écrire sous la forme :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv g^{\mu\nu} \Pi_L(p^2) + \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \Pi_T(p^2) \quad (2.85)$$

où $\Pi_L(p^2)$ et $\Pi_T(p^2)$ sont des fonctions scalaires dépendant de l'impulsion et dont les expressions dépendent du modèle considéré. Les deux tenseurs qui apparaissent dans la décomposition précédente sont les tenseurs longitudinaux et transverse et la fonction $\Pi_L(p^2)$ doit être nulle dans le cas d'une particule transverse comme le photon. A une boucle, la polarisation (du photon) se représente suivant :

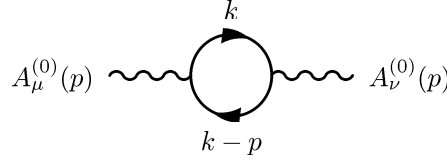


FIG. 2.2 – Polarisation du photon à une boucle dans le cas de QED.

Nous évaluons ce diagramme comme :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right] \quad (2.86)$$

Une fois les contractions sur les matrices gamma faites, il nous reste à calculer :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_{\mu\nu}}{(p^2 - m_e^2)((p-k)^2 - m_e^2)^2} \quad (2.87)$$

avec $N_{\mu\nu} = k_\mu(k_\nu - p_\nu) + k_\nu(k_\mu - p_\mu) - g_{\mu\nu}k(k-p) + g_{\mu\nu}m_e^2$. D'après les intégrales données dans l'annexe B, la partie divergente de la self-énergie est égale à :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{48\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right) \quad (2.88)$$

Finalement, nous retrouvons bien une expression transverse pour le propagateur du photon à une boucle régularisé. De plus, les divergences sont uniquement du type logarithmique, ce qui est consistant avec le résultat attendu dans le cas d'une théorie de jauge.

Relation entre la fonction de vertex à trois points et le propagateur de l'électron

Maintenant que nous avons vérifié une première identité de Ward sur les fonctions à deux points, nous allons en établir une autre concernant une relation entre les fonctions de Green à deux points et celles à trois points (nous travaillons toujours à une boucle). On définit la fonction de vertex à trois points par :

$$\Gamma^{(3)\mu\alpha\beta}(x, y, z) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \psi_\alpha(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\beta(z)} \Gamma \Big|_{(A_\mu^c = \psi = \bar{\psi} = 0)} \quad (2.89)$$

A l'ordre le plus bas en \hbar , la fonction de vertex à trois points est donnée par le diagramme suivant :

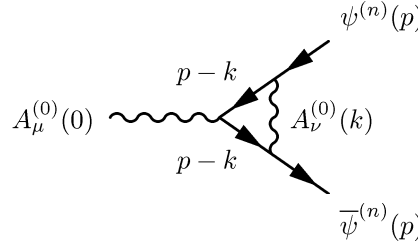


FIG. 2.3 – Correction à une boucle à la fonction de Green à trois points de QED.

Nous définissons de même la fonction à deux points de l'électron :

$$\Gamma^{(2)\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta}{\delta\psi_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\nu(y)} \Gamma \Big|_{(A_\mu^c = \psi = \bar{\psi} = 0)} \quad (2.90)$$

que nous pouvons représenter à une boucle suivant :

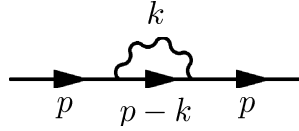


FIG. 2.4 – Self-énergie à une boucle de l'électron.

En dérivant l'égalité (2.79) par rapport à $\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\beta(z)}$, puis en prenant tous les champs classiques égaux à zéro, nous pouvons établir une nouvelle identité de Ward :

$$\partial_\mu \Gamma^{(3)\mu\alpha\beta}(x, y, z) - ie \delta^4(z - x) \Gamma^{(2)\alpha\beta}(y, x) + ie \delta^4(y - x) \Gamma^{(2)\alpha\beta}(x, z) = 0 \quad (2.91)$$

En prenant la transformée de Fourier de cette expression, nous aboutissons à :

$$q_\mu \Gamma^{(3)\mu\alpha\beta}(q, p, p') - e \Gamma^{(2)\alpha\beta}(p) + e \Gamma^{(2)\alpha\beta}(p') = 0 \quad (2.92)$$

dans la limite où $q = p' - p \rightarrow 0$, cette identité de Ward se met finalement sous la forme :

$$\Gamma^{(3)\mu\alpha\beta}(p) = -e \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma^{(2)\alpha\beta}(p) \quad (2.93)$$

que nous pouvons aussi écrire de manière synthétique comme :

$$\Gamma^\mu(p) = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p) \quad (2.94)$$

où $\Sigma(p)$ est la self-énergie et Γ^μ la fonction de vertex. Graphiquement, cette identité peut se représenter suivant :

$$q_\mu \times A_\mu^{(0)}(0) = \text{diagram 1} - \text{diagram 2}$$

Nous venons donc de déterminer une seconde identité de Ward qui doit être vérifiée par les fonctions de Green à deux et trois points lorsque le système est invariant sous des transformations de $U(1)$ ¹⁰. Comme dans le cas précédent avec la transversalité du photon, nous allons montrer que notre méthode de régularisation préserve bien les symétries de la théorie.

Commençons tout d'abord par donner les expressions explicites des différentes fonctions de Green à une boucle. La fonction à trois points à une boucle s'écrit :

$$\Gamma_\mu(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left\{ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{\lambda k^4} \right\} \times \left\{ \gamma^\sigma \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\rho \right\} \quad (2.96)$$

De même, la self-énergie de l'électron à une boucle est :

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left\{ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{\lambda k^4} \right\} \times \gamma^\rho \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\sigma \quad (2.97)$$

Une fois que nous avons réalisé les contractions sur les indices de Lorentz et régularisé les intégrales, nous obtenons :

$$\Gamma_\mu(p) = \frac{-(-ie)^2}{16\pi^2\lambda} \gamma_\mu \ln \Lambda^2 \quad (2.98)$$

et

$$-i\Sigma(p) = \frac{i(-ie)^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2 \left(\left(\frac{1}{\lambda} + 3 \right) m - \frac{1}{\lambda} \not{p} \right) \quad (2.99)$$

Nous pouvons alors montrer de manière triviale que (2.94) est bien vérifiée après régularisation, c'est-à-dire que notre méthode de régularisation préserve bien les symétries dans le

¹⁰En remarquant que :

$$\frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m} = - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{p} - m} \quad (2.95)$$

nous pouvons retrouver directement l'identité de Ward eq.(2.94) en écrivant explicitement les intégrales, mais cette méthode présente l'inconvénient de masquer totalement le rôle de l'invariance de jauge qui est le point de départ de ces calculs. Ceci est à la base de ce qui est appelé la substitution minimale : dans les diagrammes précédents, nous pouvons générer la fonction à trois points (à une boucle) en rajoutant un photon sur la ligne de fermion interne. Ceci a pour effet de doubler le nombre de propagateurs fermioniques, ce qui correspond d'après l'équation (2.95) à prendre la dérivée de l'expression initiale. Cependant, tous les diagrammes à une boucle ne peuvent pas être générés par substitution minimale.

cas de QED à une boucle. Regardons maintenant ce qui se passe dans un modèle avec une dimension supplémentaire.

2.4.2 Extension de QED à 5 dimensions

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord expliquer en quoi il peut être intéressant d'introduire une dimension supplémentaire dans une théorie, puis nous verrons la manière dont cette dimension est rajoutée et comment nous pourrions la compactifier afin de nous ramener à quatre dimensions. Ensuite, nous présenterons notre modèle d'étude, QED à 5 dimensions. Pour finir, nous le régulariserons et nous établirons l'équation d'évolution pour la constante de couplage.

Théorie des champs en 5 dimensions

En théorie quantique des champs on a été amené à traiter sur un pied d'égalité les dimensions d'espace et de temps dans des vecteurs à quatre dimensions. Ceci a permis d'unifier les théories magnétique et électrique en les introduisant dans un même potentiel A_μ . Ainsi, le passage de trois à quatre dimensions a ouvert une voie dans l'ajout de dimensions supplémentaires. L'idée d'introduire une cinquième dimension est assez ancienne et dès 1912 Gunnar Nordström élaborait un modèle à quatre dimensions d'espace et une de temps sensé unifier l'électromagnétisme et la gravitation.

Bien que l'énergie d'unification attendue soit de $1,2 \cdot 10^{19}$ GeV, appelée échelle de Planck, des scénarios en théorie des cordes prévoient que les effets d'une dimension supplémentaire pourraient être visibles dès quelques TeV, ce qui a suscité un intérêt croissant pour ce genre d'approche ces dernières années. Les mises en service prochaines du LHC et de l'ILC pourraient même permettre d'obtenir des données expérimentales à ce sujet. De plus, ce nouveau point de vue peut permettre d'étudier des problèmes de la théorie des champs sous un autre jour, comme le problème de la hiérarchie, la physique des neutrinos, les masses des fermions, le nombre de générations du modèle standard, les modifications des "running coupling constants"...

Aujourd'hui, certaines théories comme la supergravité et la théorie des cordes par exemple nécessitent l'introduction de plusieurs dimensions supplémentaires mais nous nous limiterons dans ce qui suit à un espace à 5 dimensions. De plus nous savons que la dimension de l'espace-temps est égale à quatre et il faut donc trouver un moyen de s'affranchir de la cinquième dimension pour produire des résultats physiques observables. Nous supposons donc que la topologie de la cinquième dimension est différente de celle des autres dimensions et nous la compactifierons. Pour cela, nous présenterons deux topologies différentes pour cette dimension supplémentaire.

En théorie des champs habituelle, chaque particule est représentée par un champ à quatre coordonnées dans l'espace de Minkowski. Il nous faut donc maintenant supposer que nos

champs dépendront de cinq coordonnées, où la cinquième dimension sera supposée être de type "espace". Nous aurons donc des champs $\Phi(x_A)$, où $A = 0, 1, 2, 3, 4$ et où la métrique de l'espace sera de la forme $g_{AB} = (+, -, -, -, -)^{11}$. Considérons par exemple un champ scalaire complexe, noté $\Phi(x_A)$. L'action est définie de manière conventionnelle de la manière suivante :

$$S = \int d^5x \mathcal{L}^5(x_A) \quad (2.100)$$

où \mathcal{L}^5 est la densité lagrangienne usuelle pour un champ de Klein-Gordon :

$$\mathcal{L}^5 = \frac{1}{2} ((\partial_A \Phi)^\dagger (\partial^A \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi) \quad (2.101)$$

Afin de compactifier le lagrangien, il faut nécessairement définir la topologie de la cinquième dimension. Le choix le plus simple est de considérer que cette dimension est repliée sur elle-même sous la forme d'un cercle de rayon R (le groupe d'invariance associé est alors S^1). La dimension supplémentaire sera donc périodique avec une périodicité $2\pi R$, ce qui permet de décomposer notre champ Φ sur des modes de Fourier :

$$\Phi(x_A) = \Phi(x_\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x_\mu) e^{iny/R} \quad (2.102)$$

où y est la cinquième coordonnée de notre champ. Cette écriture fait apparaître une infinité de champs à quatre dimensions ϕ_n . Nous réinjectons alors cette expression dans celle de l'action afin d'exprimer le lagrangien \mathcal{L}^5 en fonction de champs à quatre composantes :

$$S = \int d^4x \int dy \mathcal{L}^5(x_A) \equiv \int d^4x \mathcal{L}(x_\mu) \quad (2.103)$$

où nous voyons que la théorie peut être décrite par un lagrangien compactifié à quatre dimensions. Ce processus est aussi connu sous le nom de réduction dimensionnelle. Dans notre cas, le lagrangien à quatre dimensions peut être exprimé sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\partial_\mu \phi^{(n)})^\dagger (\partial^\mu \phi^{(n)}) - (m^2 + m_n^2) \phi^{(n)\dagger} \phi^{(n)}] \quad \text{avec} \quad m_n^2 = n^2/R^2 \quad (2.104)$$

où nous avons redéfini les champs suivant : $\phi^{(n)} \rightarrow (2\pi R)^{-1} \phi_n$ pour retrouver le terme cinétique. L'équation précédente met en exergue que l'une des propriétés les plus importantes de ce type de théories est l'apparition d'une "tour" infinie de champs, appelés modes de Kaluza-Klein, dont les masses m_n suivent une suite géométrique et qui possèdent les mêmes nombres quantiques que le mode 0 (qui est le mode fondamental initialement présent à quatre dimensions). Ce mode possède la masse la plus basse, masse par ailleurs indépendante du rayon R de la dimension supplémentaire et de la procédure de compactification.

¹¹Dans la suite, nous utiliserons des indices grecs pour les coordonnées de type Minkowski et des lettres majuscules pour les coordonnées en 5 dimensions.

Une autre topologie possible est celle dite d' "orbifold". La structure de la dimension supplémentaire est ici S^1/Z^2 , ce qui signifie que nous avons encore la périodicité sous $2\pi R$ à laquelle s'ajoute une symétrie sous des réflexions par rapport à un axe. Schématiquement, la cinquième dimension peut se représenter suivant :

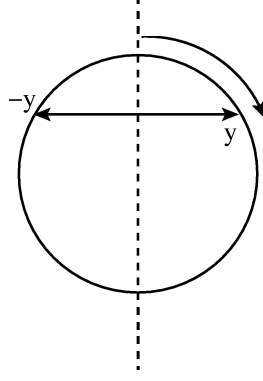


FIG. 2.5 – Représentation de la structure orbifold. Nous avons bien une périodicité de $2\pi R$ avec une invariance de l'action sous un changement de coordonnées $y \rightarrow -y$.

Nous voyons sur la figure précédente qu'il existe une relation entre la valeur du champ en y et celle en $-y$. Afin d'assurer l'invariance de l'action sous de telles transformations, nous imposerons :

$$\Phi(y) = U \Phi(-y) = \pm 1 \quad (2.105)$$

où U est une transformation unitaire qui est une symétrie du lagrangien initial \mathcal{L}^5 . Une conséquence est que la physique doit être la même de part et d'autre de l'axe de symétrie, si bien que l'action peut être calculée avec y variant sur l'intervalle $[0, \pi R]$. Nous avons :

$$S = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \mathcal{L}^5 = 2 \int d^4x \int_0^{\pi R} dy \mathcal{L}^5 \quad (2.106)$$

Nous pouvons donc développer nos champs sur une base de modes de fourier en faisant apparaître explicitement les termes pairs et impairs en y , soit :

$$\Phi(x^\mu, y) = \phi^{(0)}(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)+}(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)-}(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2.107)$$

La structure en orbifold impose que le champ Φ en 5 dimensions puisse être décomposé en Φ^+ et Φ^- qui sont respectivement pair et impair sous la transformation U :

$$\Phi^+(-y) = +\Phi^+(y) \quad (2.108)$$

$$\Phi^-(-y) = -\Phi^-(y) \quad (2.109)$$

et le développement précédent correspond donc pour chacun des champs Φ^+ et Φ^- à :

$$\Phi^+(x^\mu, y) = \phi^{(0)}(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)+}(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2.110)$$

$$\Phi^-(x^\mu, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)-}(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2.111)$$

Nous voyons clairement ici que dans le cas de l'orbifold, seuls les champs pairs ont un mode fondamental, les champs impairs étant forcément des modes excités. Une fois de plus, nous donnons l'expression du lagrangien compactifié à quatre dimensions :

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi R} \mathcal{L}^5(\Phi^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi^{(n)})^\dagger (\partial^\mu \phi^{(n)}) - m_n^2 \phi^{(n)\dagger} \phi^{(n)}] \quad (2.112)$$

Nous voyons donc comment compactifier les dimensions supplémentaires sur des espaces de topologies différentes¹². Passons maintenant au cas qui nous intéresse, QED à cinq dimensions.

Présentation du modèle

Le lagrangien de QED à cinq dimensions est formellement identique à celui en quatre dimensions, en rajoutant la dimension supplémentaire dans l'action sous la forme :

$$\mathcal{S} = \int d^5x \left(-\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} + \bar{\Psi}(i\gamma^M D_M - m_e)\Psi \right) \quad (2.113)$$

avec $M, N = (0, 1, 2, 3, 5) = (\mu, 5)$. Les matrices gamma sont alors $\gamma^M = (\gamma^\mu, i\gamma^5)$ et la dérivée covariante en cinq dimensions s'écrit :

$$D_M = (\partial_\mu - i\tilde{e}A_\mu, \partial_5 - i\tilde{e}A_5) \quad (2.114)$$

avec $\tilde{e} = \sqrt{2\pi R} e$. Afin de retrouver un lagrangien en quatre dimensions, nous allons compactifier l'action (2.113) sur S^1 . Pour ceci, nous devons décomposer nos champs en composantes de Fourier. Nous avons alors :

$$\Psi(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi^{(n)}(x^\mu) e^{iny/R} \quad (2.115)$$

$$A_\mu(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{iny/R} \quad (2.116)$$

$$A_5(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_5^{(n)}(x^\mu) e^{iny/R} \quad (2.117)$$

¹²Nous pourrions généraliser ce que nous venons de faire à cinq dimensions avec plusieurs dimensions supplémentaires, mais ceci s'avère beaucoup plus délicat car au-delà de cinq dimensions nous aurons une nouvelle γ -algèbre avec des matrices 8×8 en dimension 6 par exemple. Le cas de QED à six dimensions a été étudié par Thomas Lepers au cours de son stage de master 2.

Ici, les champs quadri-dimensionnels $\Psi^{(n)}$, $A_\mu^{(n)}$ et $A_5^{(n)}$ pour $n \neq 0$ sont les modes de Kaluza-Klein associés aux champs initiaux (à 5 dimensions) Ψ , A_μ et A_5 respectivement. Nous avons ici choisi de compactifier sur S^1 car la compactification sur S^1/Z^2 génère une somme de lagrangiens de QED avec des masses pour les électrons qui seront les masses des modes de Kaluza-Klein¹³. Une fois que nous avons remplacé les champs initiaux par leurs composantes de Fourier, l'expression du lagrangien (2.113) compactifié est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_4 = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu(-n)} F_{\mu\nu}^{(n)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \bar{\psi}^{(-n)} (i \not{\partial} - M_n) \psi^{(n)} \right. \\
& + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \int d^4x e \bar{\psi}^{(-n)} \gamma^\mu A_\mu^{(n-m)} \psi^{(m)} + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \int d^4x i e \bar{\psi}^{(-n)} \gamma^5 A_5^{(n-m)} \psi^{(m)} \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_5^{(-n)} \partial^\mu A_5^{(n)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \frac{-in}{R} A^{\mu(-n)} \partial_\mu A_5^{(n)} \right. \\
& \left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} A_\mu^{(-n)} A^{\mu(n)} + \int d^4x \mathcal{L}_{gauge-fixing} \right] \right] \quad (2.119)
\end{aligned}$$

où nous choisissons un terme de Stueckelberg afin de fixer la jauge (dans la suite, tous les résultats physiques seront indépendants de ce terme de fixation de jauge) :

$$\mathcal{L}_{gauge-fixing} = -\frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu^{(0)})^2 \quad (2.120)$$

Nous voyons donc que lorsque nous compactifions sur S^1 un nouveau champ scalaire A_5 ainsi que de nouveaux termes de couplage entre les particules de Kaluza-Klein et les particules “classiques” vont apparaître. En particulier, ces couplages vont apporter de nouvelles contributions à la self-énergie à une boucle pour l'électron, à la fonction de polarisation du vide et à la fonction à trois points. Sachant que la compactification n'est qu'une réécriture du lagrangien dans une dimension différente, nous nous attendons à ce que les deux lagrangiens soient équivalents et qu'ils vérifient en particulier les identités de Ward correspondant à la symétrie $U(1)$.

Résultats de la régularisation

Afin de déterminer les identités de Ward pour ce modèle, la première chose à faire est de

¹³Plus exactement, le lagrangien de QED à cinq dimensions compactifié sur S^1/Z^2 est :

$$\mathcal{L}_{S^1/Z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{4} F^{(n)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(n)} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_n)\Psi \right\} \quad (2.118)$$

Cela ne présente aucun intérêt pour tester notre méthode de régularisation puisqu'on aura une somme de lagrangiens de QED qui vont tous séparément vérifier les identités de Ward.

donner la forme générale des transformations des champs ; nous avons :

$$A_\mu^{(0)} \rightarrow A_\mu^{(0)} + \partial_\mu \theta(x^\mu) \quad (2.121)$$

$$A_5^{(0)} \rightarrow A_5^{(0)} \quad (2.122)$$

$$\psi^{(n)} \rightarrow e^{ie\theta(x^\mu)} \psi^{(n)} \quad (2.123)$$

Comme dans la partie précédente, nous allons nous restreindre aux deux identités de Ward concernant la transversalité du photon et la relation entre la self-énergie de l'électron et la fonction à trois points (le tout à une boucle). En particulier, nous n'aurons que des particules “physiques” sur les pattes externes (*i.e.* présentes dans le lagrangien QED à 4 dimensions) et les lignes internes pourront contenir toutes les particules compatibles avec les couplages apparaissant dans (2.119). Les contributions à la fonction de polarisation du vide à une boucle sont donc toutes de la forme :

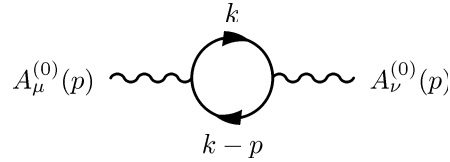


FIG. 2.6 – Polarisation du photon à une boucle dans le cas de QED à 5 dimensions. Nous avons une infinité de contributions identiques où les lignes internes contiennent les fermions $\psi^{(n)}$ et $\bar{\psi}^{(-n)}$ pour toutes les valeurs de n .

La self-énergie correspondante sera donc la somme d'une infinité de termes ayant la même forme ; explicitement :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ie^2}{12\pi^2} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2 + n^2/R^2} \right) \quad (2.124)$$

Il est alors trivial de voir que le résultat final sera transverse car tous les termes de la somme le sont séparément. Nous pouvons même aller plus loin en regardant les effets de la dimension supplémentaire sur l'évolution de la constante de couplage. Afin de calculer cette somme, nous écrivons :

$$\ln \left(\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^2}{m_e^2 + n^2/R^2} \right) = \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right) + \ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda^2}{m_e^2 + n^2/R^2} \right) \quad (2.125)$$

Le premier terme du membre de droite correspond à la contribution de QED à quatre dimensions alors que le second terme provient des modes de Kaluza-Klein. Ce terme ne pouvant pas être calculé directement, nous allons donc faire deux hypothèses :

1. $m_e^2 \ll n^2/R^2$

Cette hypothèse peut être justifiée par le fait que la masse du premier mode de Kaluza-Klein est nettement supérieure à celle de l'électron, ce qui est justifié expérimentalement [28].

2. $n_{max} = \Lambda R \gg 1$

Dans l'esprit du groupe de renormalisation au sens de Wilson [29], Λ est l'échelle typique qui permet de sélectionner quelles seront les particules présentes dans la théorie. Comme nous sommes intéressés par ce qui se passe à très haute énergie, nous choisirons une grande valeur du cut-off ce qui valide cette dernière approximation.

Ces deux simplifications nous permettent donc de formuler le second terme de (2.125) suivant :

$$\ln \left(\prod_{n=1}^{n_{max}} \frac{\Lambda^2 R^2}{n^2} \right) = \ln \left(\frac{(\Lambda^2 R^2)^{\Lambda R}}{(\Lambda R)!^2} \right) \sim 2\Lambda R - \ln \Lambda R \quad (2.126)$$

où nous avons utilisé la formule de Stirling dans la dernière étape. Finalement, la partie divergente pour la polarisation du vide est égale à :

$$\Pi_{div}^{\mu\nu}(q) = -\frac{e^2}{12\pi^2} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) (4\Lambda R) \quad (2.127)$$

Cette dernière expression nous permet finalement de calculer la fonction β_e qui nous permettra de connaître l'évolution de e . Nous commençons par écrire :

$$\beta_e = -\frac{e}{2} \Lambda \frac{\partial \Pi_\Lambda}{\partial \Lambda} \quad (2.128)$$

où Π_Λ est la partie divergente de la polarisation du vide définie par :

$$\Pi_\Lambda = \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \Pi_{div}^{\mu\nu} = \frac{-e^2}{3\pi^2} \Lambda R \quad (2.129)$$

Nous obtenons alors l'expression explicite pour la fonction β_e :

$$\beta_e = \frac{e^3}{6\pi^2} \Lambda R \quad (2.130)$$

De plus, par définition, la fonction β_e est égale à :

$$\beta_e = \Lambda \frac{\partial e}{\partial \Lambda} \quad (2.131)$$

ce qui nous permet de déterminer l'évolution de la constante de couplage e en fonction de l'échelle considérée. Nous obtenons finalement :

$$e(\Lambda) = \left(\frac{e(R^{-1})^2}{1 - \frac{e(R^{-1})^2}{3\pi^2} (\Lambda R - 1)} \right)^{1/2} \quad (2.132)$$

Nous retrouvons bien ici le terme linéaire en Λ qui intervient dans l'évolution de la constante de couplage, alors qu'en quatre dimensions nous avons une évolution logarithmique. Ce résultat est en total accord avec les résultats trouvés dans [30, 31], la seule différence étant qu'ici les symétries du modèle ne sont pas brisées par la régularisation alors que Dudas *et*

al. retrouvaient un résultat en accord avec les symétries en imposant que le résultat vérifie les identités de Ward (en pratique, la partie longitudinale de la fonction de polarisation a été supprimée à la fin du calcul). Afin de comparer notre résultat avec celui obtenu pour QED en quatre dimensions, nous pouvons finalement tracer l'évolution de la constante de couplage en fonction de ΛR . Nous obtenons :

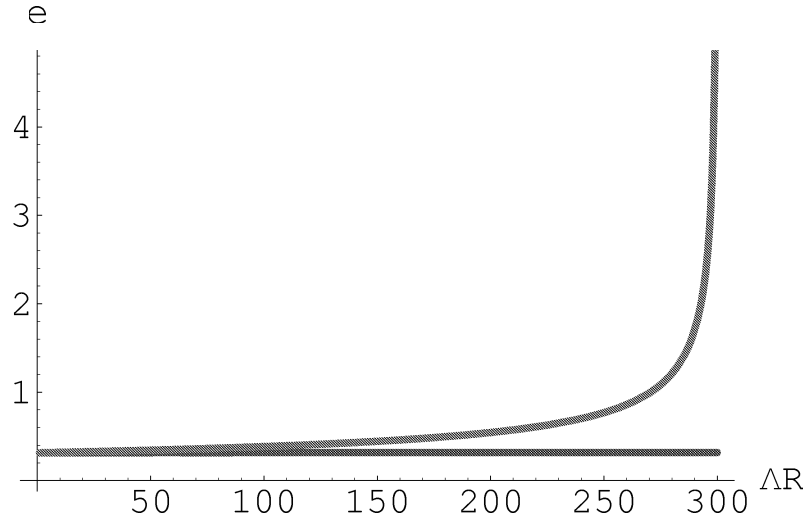


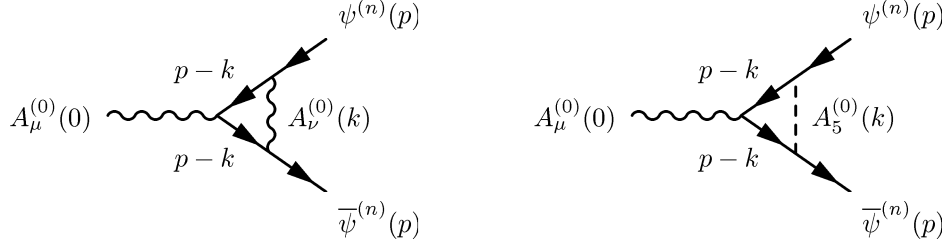
FIG. 2.7 – Evolution de la constante de couplage de QED à quatre et cinq dimensions en fonction de ΛR . La courbe supérieure est celle pour QED à 5 dimensions. Ici le rayon de la dimension supplémentaire est choisi égal à $(100 \text{ GeV})^{-1}$. On voit que nous avons un pôle de Landau aux alentours de $(300 \text{ GeV})^{-1}$ [32].

Nous voyons bien ici que l'évolution de la constante de couplage est plus rapide en cinq dimensions, et nous pouvons ainsi espérer voir une dégénérescence des constantes de couplage électromagnétique, faible et forte à des énergies plus basses que celles initialement prévues par le modèle standard.

Relation entre la fonction de vertex à trois points et le propagateur de l'électron

Une dernière propriété que nous pouvons ici vérifier est l'identité de Ward entre la self-énergie de l'électron et la fonction à trois points de QED. Afin de nous ramener à un cas physique, nous choisissons de conserver des photons “physiques” sur les pattes externes, c'est-à-dire les photons de mode zéro. Nous pouvons alors montrer que cette identité de Ward est identique à celle à quatre dimensions, mais cette fois-ci les particules qui se propagent sur les pattes internes pourront être des modes de Kaluza-Klein ; on aura donc une infinité de contributions. Les diagrammes de Feynman qui vont contribuer pour la fonction

à trois points sont :



que nous notons respectivement $\Sigma^{(1)}$ et $\Sigma^{(2)}$. De la même manière, les contributions $\Gamma_\mu^{(1)}$ et $\Gamma_\mu^{(2)}$ à la self-énergie de l'«électron» de mode n seront :



Toujours en utilisant notre méthode de régularisation, il est facile de montrer que les différentes contributions divergentes sont égales à :

$$-i\Sigma^{(1)}(p) = \frac{i(-ie)^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2 \left(\left(\frac{1}{\lambda} + 3 \right) m_n - \frac{1}{\lambda} \not{p} \right) \quad (2.133)$$

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = \frac{i(ie)^2}{32\pi^2} \ln \Lambda^2 (2m_n - \not{p}) \quad (2.134)$$

$$\Gamma_\mu^{(1)}(p) = \frac{-(-ie)^3}{16\pi^2 \lambda} \gamma_\mu \ln \Lambda^2 \quad (2.135)$$

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p) = \frac{-(-ie)^3}{32\pi^2} \gamma_\mu \ln \Lambda^2 \quad (2.136)$$

Finalement, il est alors trivial de montrer que les identités de Ward sont une fois de plus vérifiées ; on a bien :

$$\Gamma_\mu^{(1)}(p) + \Gamma_\mu^{(2)}(p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} (\Sigma^{(1)}(p) + \Sigma^{(2)}(p)) \quad (2.137)$$

Pour conclure cette partie consacrée à la régularisation, nous pouvons dire qu'en ce qui concerne notre problème il n'existait pas de méthode satisfaisante qui permettait de régulariser une théorie chirale effective en vue d'obtenir les équations du groupe de renormalisation au sens de Wilson. Nous avons donc introduit notre méthode qui semble préserver les symétries dans différents modèles, aussi bien en physique des particules que dans des modèles hadroniques (en effet, on retrouve bien la transversalité du photon à une boucle dans le modèle que nous allons étudier dans la troisième partie, ainsi que le théorème de Goldstone toujours dans cette théorie et dans le cas du modèle sigma-linéaire jaugé). Tous ces résultats favorables nous permettent de penser que notre méthode doit être correcte, ce qui va nous permettre de mener à bien l'étude qui va suivre sur la restauration de la symétrie chirale dans un modèle phénoménologique chirale.

Chapitre 3

Equations du groupe de renormalisation pour un modèle chiral effectif

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de la restauration de la symétrie chirale. Nous commencerons donc par introduire la symétrie chirale dans le cadre des théories effectives décrivant l'interaction forte. Nous présenterons ensuite notre modèle d'étude, dont la principale caractéristique est de reproduire la phénoménologie basse énergie. Finalement nous essaierons de comprendre comment se manifeste la restauration de la symétrie chirale dans le cadre de ce modèle *via* les outils du groupe de renormalisation décrits précédemment.

3.1 Une introduction à la symétrie chirale

3.1.1 Introduction générale

Le principe d'invariance de jauge est sans nul doute l'élément central de la description de toutes les interactions fondamentales et peut-être même de leur unification [33]. Ainsi, la mise en évidence expérimentale des quarks (*via* la diffusion profondément inélastique), ainsi que l'étude de la structure en multiplets des états liés à plusieurs quarks (mésons $\bar{q}q$ ou baryons qqq) a conduit à l'introduction d'un nombre quantique supplémentaire nécessaire pour décrire l'interaction forte : la couleur. Chaque saveur de quark se présente alors sous la forme d'un triplet de couleur :

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La théorie de jauge des interactions fortes doit donc être construite à partir de l'invariance sous des transformations du groupe $SU(3)_c$: c'est la chromodynamique quantique (ou QCD). Notons que le caractère non-abélien de $SU(3)_c$ implique la liberté asymptotique, ce qui permettra par exemple de réaliser un développement systématique de la théorie dans le domaine des hautes énergies (ceci peut être réalisé avec l'"operator product expansion"). Par contre, un tel développement ne peut plus s'appliquer dans le domaine non perturbatif et nous ne savons pas décrire la matière hadronique aux basses énergies avec QCD : nous utilisons alors des théories effectives, incorporant les symétries de QCD mais faisant intervenir d'autres degrés de liberté que les quarks et les gluons. Ces degrés de liberté sont

ensuite réinterprétés en termes de particules physiques (par exemple des mésons). Une symétrie importante de QCD est la symétrie chirale. Afin de voir comment celle-ci apparaît, considérons le lagrangien libre de QCD dans un espace à $N_f = 2$ saveurs :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\psi}_u \gamma^\mu \partial_\mu \psi_u + i\bar{\psi}_d \gamma^\mu \partial_\mu \psi_d - m_u \bar{\psi}_u \psi_u - m_d \bar{\psi}_d \psi_d \quad (3.2)$$

où ψ_u et ψ_d sont les champs associés aux quarks u et d , avec des masses respectives m_u et m_d . Nous le décomposons ensuite en une partie invariante sous $\text{SU}(2)_f$, plus un terme perturbatif. \mathcal{L}_{QCD} se réécrit alors :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{m_u + m_d}{2} \bar{\psi} \psi - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\psi} \tau_3 \psi \quad \text{avec} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Nous définissons alors deux transformations dans l'espace des saveurs :

$$\text{vectorielle : } \psi \rightarrow e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}} \psi \quad (3.4)$$

$$\text{axiale : } \psi \rightarrow e^{i\beta_k \gamma_5 \frac{\tau_k}{2}} \psi \quad (3.5)$$

où les τ_k ($k = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli. Nous pouvons en déduire immédiatement les deux remarques suivantes :

1. Le lagrangien n'est pas invariant sous des transformations vectorielles : il y a un terme de violation d'isospin :

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\psi} \tau_3 \psi \quad (3.6)$$

En revanche, si nous supposons que $m_u = m_d$, la symétrie devient exacte. D'après le théorème de Noether, nous avons alors trois courants conservés et trois charges conservées (les composantes de l'isospin) : $Q_k = \int d\vec{r} \psi^\dagger \frac{\tau_k}{2} \psi \equiv I_k$. Cela implique aussitôt que l'isospin commute avec le hamiltonien du système ($[H, I_k] = 0$). Comme par ailleurs l'isospin du vide est nul : $I_k |0\rangle = 0$, nous concluons que nous devons normalement observer une structure en multiplets du spectre des hadrons. Nous parlerons dans un tel cas de symétrie réalisée à la Wigner.

2. Sous des transformations axiales, le terme de brisure de symétrie s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = \frac{m_u + m_d}{2} \bar{\psi} \psi - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\psi} \tau_3 \psi \quad (3.7)$$

La symétrie axiale est alors réalisée par le système si $\mathcal{L}_{\text{sb}} = 0$, soit $m_u = m_d = 0$. Les charges conservées seront définies par $Q_k^5 = \int d\vec{r} \psi^\dagger \frac{\gamma_5 \tau_k}{2} \psi$. En fait, cette symétrie est une symétrie presque exacte de la nature car les masses des quarks u et d sont faibles comparées aux masses hadroniques typiques. Le terme \mathcal{L}_{sb} pourra donc être traité perturbativement. Cependant, dans ce cas, on n'observe pas de structure en multiplets du spectre des hadrons (ici le vide n'est pas invariant sous des transformations axiales) : nous dirons que la symétrie est spontanément brisée, ce qui implique la présence de modes de Goldstone de masse nulle. Ces derniers seront identifiés avec les pions dans la suite, car ils possèdent les mêmes nombres quantiques.

Les transformations axiale et vectorielle vont nous permettre de définir la symétrie chirale. Introduisons tout d'abord des champs de chiralité gauche et droite ψ_L et ψ_R . Dans le cas de particules de masse nulle (ce qui est presque le cas), nous pouvons confondre chiralité et hélicité, et les projecteurs s'écrivent alors :

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad (3.8)$$

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \quad (3.9)$$

Si nous nous plaçons dans le cas où les charges vectorielle et axiale sont conservées ($m_u = m_d = 0$), le lagrangien se réécrit donc simplement sous la forme :

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad \text{avec} \quad \psi = \psi_L + \psi_R \quad (3.10)$$

Celui-ci est manifestement séparément invariant sous des transformations globales de $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$:

$$SU(2)_L : \quad \psi_L \rightarrow e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}} \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi_R \quad (3.11)$$

$$SU(2)_R : \quad \psi_R \rightarrow e^{i\beta_k \frac{\tau_k}{2}} \psi_R, \quad \psi_L \rightarrow \psi_L \quad (3.12)$$

Cette symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R$ est appelée symétrie chirale ; c'est une symétrie exacte du système lorsque nous nous plaçons à la limite des masses nulles, aussi appelée limite chirale. Dans le cas de masses non nulles, la brisure de la symétrie axiale se retrouve dans une petite brisure de la symétrie chirale (le terme de masse mélange les composantes gauche et droite du champ).

Dans la limite chirale, le lagrangien de QCD est invariant sous chacune des transformations de $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$ et les charges conservées correspondantes forment alors deux algèbres séparées :

$$[Q_L^i, Q_L^j] = i\epsilon_{ijk} Q_L^k \quad (3.13)$$

$$[Q_R^i, Q_R^j] = i\epsilon_{ijk} Q_R^k \quad (3.14)$$

$$[Q_L^i, Q_R^j] = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$Q_{L,R}^k = \int d\vec{r} \, \psi_{L,R}^\dagger \frac{\tau_k}{2} \psi_{L,R} = \frac{1}{2} (Q^k \mp Q_5^k) \quad (3.16)$$

En particulier, le hamiltonien commute avec les charges gauche et droite ($[H, Q_{L,R}^k] = 0$) et nous pourrions *a priori* nous attendre à un dédoublement de la structure en multiplets. Ainsi, chaque hadron devrait posséder un partenaire chiral de parité opposée et de masse sensiblement identique. Ce scénario est manifestement exclu, car nous n'observons pas de tels dédoublements dans la nature. Pour que le monde hadronique se comporte tel que nous venons de le décrire, il faudrait que le vide soit lui aussi invariant sous le groupe de symétrie considéré, *i.e.* que la symétrie soit réalisée à la Wigner.

Cependant, la charge axiale du vide de QCD n'est pas nulle : $Q_k^5|0\rangle \neq 0$. De plus, Q_k^5 commute avec H , ce qui implique que tous les états générés par Q_k^5 ont la même énergie : le vide est donc dégénéré. Le passage d'un état à un autre état de même énergie se fait *via* l'échange de particules de masse nulle : les bosons de Goldstone. Dans le cas qui nous intéresse, les bosons de Goldstone associés à la brisure de la symétrie chirale seront identifiés avec les pions, qui sont nos nouveaux degrés de liberté.

Il existe néanmoins une différence fondamentale entre les théories effectives et QCD lorsque nous cherchons à réaliser un développement perturbatif de ces théories. En effet, on peut décomposer les deux lagrangiens sous la forme [34] :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{sb}} \quad \text{pour les théories effectives} \quad (3.17)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad \text{pour QCD} \quad (3.18)$$

La liberté asymptotique de QCD impose au système d'être de moins en moins corrélié et de se comporter comme un système de particules libres dans la limite des grandes impulsions. Ainsi, le développement de QCD est basé sur une décomposition du lagrangien en un terme $\mathcal{L}_{\text{free}}$ de particules libres et un terme d'interaction \mathcal{L}_{int} qui pourra être traité de manière perturbative aux hautes énergies. Ceci est la base de l'operator product expansion [35] (OPE) de QCD qui utilise cette propriété asymptotique pour réaliser un développement perturbatif systématique de la théorie. Par contre, en ce qui concerne les théories effectives de QCD, rien n'indique que le terme d'interaction soit assez faible pour permettre un tel développement. Etant donné que nous considérons des théories de basse énergie, nous pouvons alors supposer que nous allons nous trouver dans la phase brisée de QCD pour la symétrie chirale. Nous choisissons dans ce cas de décomposer le système en une partie invariante sous $SU(2)_L \times SU(2)_R$ plus un petit terme de brisure de symétrie. Ces décompositions haute et basse énergie permettent la compréhension de l'interaction forte dans leur intervalle de validité respectif. Différentes techniques ont été développées pour décrire les processus basse énergie, pour lesquels nous souhaitons obtenir un développement systématique des fonctions de Green du système. Aux très basses énergies ($\mu \simeq m_\pi$), les seuls degrés de liberté excités sont les pions et dans ce cas nous utilisons la théorie des perturbations chirales [36].

3.1.2 Application aux théories effectives : le modèle sigma-linéaire

Aux basses énergies, les degrés de liberté de QCD ne sont plus les quarks et les gluons, mais les pions, qui sont les états liés les plus légers. Nous allons introduire le modèle σ -linéaire, basé sur la symétrie chirale, afin de voir une manière simple de construire une théorie effective [33].

Considérons pour commencer une théorie chirale des nucléons ; nous les décomposons en champs d'hélicité gauche et droite, comme pour les quarks : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_L + \psi_R$. Le lagrangien pour les nucléons libres s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - M_N\bar{\psi}\psi \quad (3.19)$$

où nous remarquons que la symétrie chirale est fortement violée par le terme $\mathcal{L}_{\text{sb}} = -M_N \bar{\psi} \psi$ avec $M_N \simeq 940$ MeV qui est la masse du nucléon. Afin d'obtenir un lagrangien qui soit invariant sous $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$, nous introduisons un champ $W(x)$ dans l'expression précédente :

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = -M_N(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{sb}} = -g(\bar{\psi}_L W(x) \psi_R + \bar{\psi}_R W^\dagger(x) \psi_L) \quad (3.20)$$

Nous paramétrons alors la matrice $W(x)$ selon quatre champs réels σ et $\vec{\pi}$: $W(x) = \sigma(x) + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)$ qui se transforment de manière à rendre le lagrangien (3.19) invariant sous des transformations chirales. Enfin, avec l'aide des projecteurs définis précédemment, le terme de brisure de symétrie se réécrit :

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = -g\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5)\psi \quad (3.21)$$

Si nous voulons de plus que \mathcal{L} soit invariant sous des transformations d'isospin, de Lorentz et par parité, σ doit être un champ scalaire isoscalaire ($J^\pi = 0^+, I = 0$) et $\vec{\pi}$ un champ pseudoscalaire isovectoriel ($J^\pi = 0^-, I = 1$). Nous venons donc de reformuler le terme de masse du lagrangien en fonction des nouveaux champs σ et $\vec{\pi}$. Afin d'obtenir un lagrangien plus général, nous ajoutons un terme contenant la dynamique des champs σ et $\vec{\pi}$, ainsi qu'un potentiel d'interaction $V(\sigma, \vec{\pi})$:

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - V(\sigma, \vec{\pi}) \quad (3.22)$$

Nous faisons alors un choix particulier pour le potentiel incluant des termes de masse pour σ et $\vec{\pi}$, ainsi qu'un terme d'interaction et un terme de brisure explicite de la symétrie chirale (ce terme de brisure explicite nous permet de générer une petite masse pour les pions) :

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - c\sigma \quad (3.23)$$

L'introduction d'une forme explicite de potentiel nous permet de voir comment la symétrie du vide peut être brisée en fonction de l'évolution des paramètres. Pour commencer, nous nous plaçons à la limite chirale $c = 0$. De plus, pour des raisons de stabilité, nous choisissons $\lambda > 0$. Deux cas sont alors à envisager en fonction de la valeur de v^2 :

1. $v^2 < 0$. Le potentiel présente un minimum pour $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = 0$, d'où $\langle 0|\sigma|0\rangle = \langle 0|\vec{\pi}|0\rangle = 0$. Dans ce cas, le vide possède la symétrie du lagrangien et la symétrie est réalisée à la Wigner. Cependant, la théorie prévoit un nucléon de masse nulle et un pion dégénéré en masse avec son partenaire chirale le sigma, de masse $\sqrt{-\lambda v^2}$, ce qui ne correspond pas à un cas physique.
2. $v^2 > 0$. Dans ce cas, le potentiel possède la forme d'un chapeau mexicain. Le vide du système se situe sur le cercle d'équation $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = v^2$ et il est infiniment dégénéré. Nous choisissons alors une configuration fondamentale "particulière" $\langle 0|\sigma|0\rangle = v$, $\langle 0|\vec{\pi}|0\rangle = 0$, à partir de laquelle nous pouvons générer une infinité d'autres états du vide dégénérés en appliquant $Q_k^5 : |\alpha\rangle = \exp(i\alpha Q_k^5)|0\rangle$, où Q_k^5 est

l'opérateur permettant de se déplacer sur le cercle chirale. Le vide n'est alors plus invariant par rotation : la symétrie chirale est spontanément brisée. Il est commode d'introduire un champ fluctuant $s = \sigma - v$ qui va décrire les oscillations dans la direction radiale. Du lagrangien, nous déduisons alors le spectre :

$$M_N = gv = g\langle\sigma\rangle, \quad m_\pi = 0, \quad m_\sigma = 2\lambda v^2 \quad (3.24)$$

Ce mécanisme génère des pions de masse nulle : ce sont les bosons de Goldstone. Ils correspondent aux excitations orthoradiales sur le cercle chirale.

Si nous considérons de plus le terme de brisure explicite de symétrie, l'état fondamental doit simultanément vérifier les conditions :

$$\frac{dV}{d\vec{\pi}} = \lambda\vec{\pi}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2) = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{dV}{d\sigma} = \lambda\sigma(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2) - c = 0 \quad (3.26)$$

Cette fois, la direction de l'état fondamental est imposée : nous avons "penché" le chapeau mexicain, privilégiant une direction particulière pour l'orientation du vide.

Le modèle σ -linéaire que nous venons de construire permet une bonne description de la matière hadronique aux basses énergies (où le méson ρ n'est pas encore excité) ; le σ est interprété comme la "particule d'interaction" pour la diffusion π - π dans le canal $I = 0$ [37]¹. Si l'on augmente l'énergie, l'introduction du méson ρ devient indispensable. C'est ce que nous allons faire maintenant.

¹Nous pouvons aussi obtenir une théorie ne contenant que des pions : pour cela, on fait tendre λ (et donc m_σ) vers l'infini pour éliminer le champ σ de la théorie. Le système est alors gelé sur le cercle chirale, où les champs σ et $\vec{\pi}$ vérifient la condition non linéaire suivante :

$$\sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x) = f_\pi^2 \quad (3.27)$$

Il est alors possible d'exprimer la matrice W en fonction d'une matrice unitaire U :

$$W = \sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi} \equiv f_\pi U, \quad UU^\dagger = 1 \quad (3.28)$$

et le lagrangien se réexprime en fonction des nouveaux champs selon :

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U + \frac{1}{4} f_\pi^2 m_\pi^2 \text{tr} (U + U^\dagger) \quad (3.29)$$

Nous venons de construire l'analogue du premier terme d'un lagrangien de perturbations chirales au plus bas ordre dans les dérivées des champs et dans la masse des pions. La présence de termes dérivatifs au niveau du lagrangien d'interaction implique que les bosons de Goldstone interagissent faiblement aux basses énergies.

3.2 Présentation du modèle

3.2.1 Construction

La théorie effective que nous allons présenter va nous permettre de décrire la matière hadronique aux basses énergies (pour ceci, voir les figures 3.4 et 3.5). Le modèle σ -linéaire que nous venons de présenter sera ici insuffisant car il ne prend pas en compte les nouveaux modes qui seront excités à ces énergies : le ρ et le a_1 . Il existe diverses manières d'introduire ces mésons [20], mais nous allons nous restreindre ici au cas le plus simple, celui du modèle σ -linéaire jaugé. La démarche générale est d'imposer que la symétrie chirale soit une symétrie exacte de notre modèle. Il devra donc être invariant sous :

$$(SU(2)_L \times SU(2)_R)_{global} \longrightarrow (SU(2)_L \times SU(2)_R)_{local} \quad (3.30)$$

Le lagrangien du modèle σ -linéaire n'est évidemment pas invariant sous de telles transformations et nous devons introduire des champs de jauge afin de restaurer l'invariance. Avant cela il est pratique d'introduire le vecteur à quatre composantes suivant :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

de telle sorte que nous pouvons réexprimer le lagrangien du modèle σ -linéaire selon :

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 \quad (3.32)$$

Pour $\mu^2 < 0$ la symétrie chirale est spontanément brisée. Afin de donner une petite masse aux pions, nous rajoutons un terme de brisure explicite :

$$\mathcal{L}_{SB} = c\sigma \quad (3.33)$$

Sous la forme (3.32) le lagrangien est construit pour être invariant sous des transformations chirales globales. L'invariance sous des transformations chirales locales est obtenue en introduisant la dérivée covariante :

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = (\partial_\mu - ig Y_\mu) \Phi = \begin{pmatrix} \partial_\mu \sigma + g \vec{a}_{1\mu} \cdot \vec{\pi} \\ \partial_\mu \vec{\pi} + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{\pi} - g \vec{a}_{1\mu} \sigma \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

avec

$$Y_\mu = \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{T} + \vec{a}_{1\mu} \cdot \vec{T}^5 \quad (3.35)$$

où T et T^5 sont des matrices du groupe $O(4)$ agissant dans l'espace des saveurs². Nous venons ainsi d'introduire deux nouveaux champs vectoriels ρ et a_1 et nous disposons maintenant des champs que nous souhaitons avoir pour mener notre étude de la restauration

²Nous pouvons noter que $O(4)$ est isomorphe à $SU(2)$ ce qui assure que le lagrangien \mathcal{L}_Φ est bien celui présenté dans la partie précédente.

de la symétrie chirale. Si nous voulons de plus donner un contenu dynamique à ces champs, nous pouvons introduire un terme cinétique type Yang-Mills :

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{8} \text{tr} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}^{\mu\nu} + \vec{a}_{1\mu\nu} \cdot \vec{a}_1^{\mu\nu}) \quad (3.36)$$

avec

$$Y_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu + ig [Y_\mu, Y_\nu] \equiv \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{T} + \vec{a}_{1\mu\nu} \cdot \vec{T}^5 \quad (3.37)$$

et

$$\vec{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + g \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu} \quad (3.38)$$

$$\vec{a}_{1\mu\nu} = \partial_\mu \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu \vec{a}_{1\mu} + g \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} \quad (3.39)$$

Pour finir, nous ajoutons un terme de masse explicite pour les mésons vecteurs :

$$\mathcal{L}_{m_0} = \frac{m_0^2}{4} \text{tr} Y_\mu Y^\mu = \frac{m_0^2}{2} (\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \vec{a}_{1\mu} \cdot \vec{a}_1^\mu) \quad (3.40)$$

Nous venons ici de construire le lagrangien du modèle sigma-linéaire jauge dont l'expression finale est :

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = (\mathcal{L}_\Phi)_{\partial_\mu \Phi \rightarrow \mathcal{D}_\mu \Phi} + \mathcal{L}_{\text{SB}} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{m_0} \quad (3.41)$$

Nous pouvons formuler plusieurs remarques concernant ce lagrangien :

1. Dans notre modèle, la symétrie chirale est spontanément brisée, ce qui conduit à une valeur dans le vide non nulle pour le champ σ . Nous redéfinissons alors ce champ d'après :

$$\sigma \longrightarrow \sigma + \sigma_0 \quad (3.42)$$

où la valeur de σ_0 est la valeur moyenne de σ dans le vide et le nouveau champ σ correspond alors aux fluctuations autour de la valeur d'équilibre. Au niveau de l'arbre, afin de connaître la valeur de σ_0 , nous minimisons le potentiel ; nous devons ainsi résoudre l'équation :

$$\lambda^2 \sigma_0^3 + \mu^2 \sigma_0 - c = 0 \quad (3.43)$$

Après avoir réalisé le shift sur le champ σ , les masses des champs π , σ et ρ , a_1 ne sont plus dégénérées et nous pouvons alors reproduire les masses physiques en ajustant les différents paramètres du modèle.

2. Une fois que nous avons réalisé la substitution (3.42), un terme de mélange va apparaître dans le lagrangien :

$$\mathcal{L}_{\pi a_1} = -ig Y_\mu \Phi_0 \cdot \partial^\mu \Phi = -g \sigma_0 \vec{a}_{1\mu} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \quad (3.44)$$

Nous pouvons alors nous affranchir de ce terme de mélange en redéfinissant le champ a_1 suivant :

$$\vec{a}_{1\mu} \longrightarrow \vec{a}_{1\mu} + g \sigma_0 / m_{a_1}^2 \partial_\mu \vec{\pi} \quad (3.45)$$

suivi par une renormalisation du champ du pion $\vec{\pi}_{\text{new}} = \vec{\pi}_{\text{old}} / \sqrt{Z}$, avec $Z = m_{a_1}^2 / m_\rho^2$. Il est important de savoir comment traiter ce terme de mélange car dans la suite nous ne pourrions pas trouver de redéfinition des champs qui nous permette de nous affranchir de ce terme de mélange. La solution sera de resommer les séries de Dyson.

3. Bien que le modèle σ -linéaire jauge possède les degrés de liberté pertinents pour notre étude, la phénoménologie reproduite par ce modèle n'est pas satisfaisante, notamment en ce qui concerne les principaux canaux de désintégration du ρ et du a_1 , respectivement $\rho \rightarrow \pi\pi$ et $a_1 \rightarrow \rho\pi$. En effet, avec notre modèle, les différents diagrammes qui vont contribuer à ces deux largeurs seront :

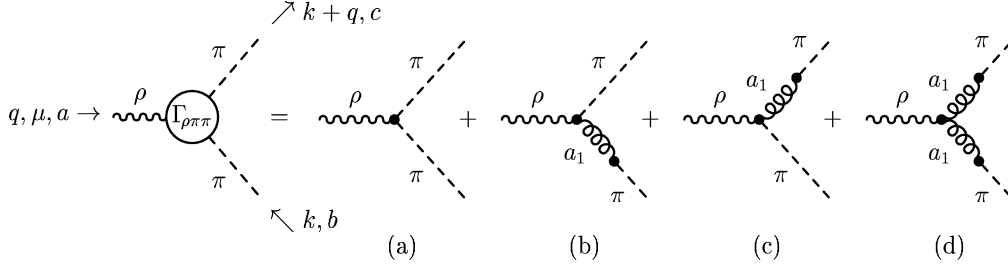


FIG. 3.1 – Diagrammes qui contribuent à la fonction de désintégration $\rho \rightarrow \pi\pi$ provenant du modèle sigma-linéaire après brisure de symétrie.

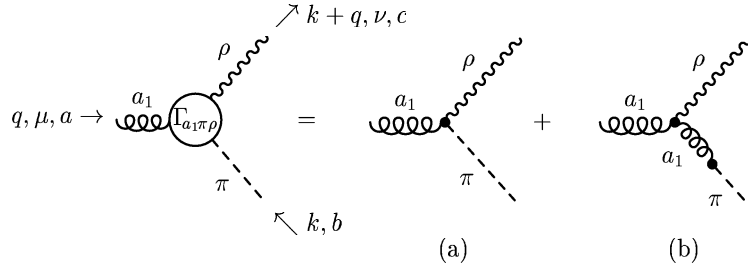


FIG. 3.2 – Diagrammes qui contribuent à la fonction de désintégration $a_1 \rightarrow \rho\pi$ provenant du modèle sigma-linéaire après brisure de symétrie.

Le dernier terme (qui contient dans les deux cas les interactions entre trois mésons vecteurs) conduit à chaque fois à une largeur de désintégration trop faible ainsi qu'à un mauvais facteur de forme électromagnétique pour le pion. Une bonne reproduction des données expérimentales passe donc nécessairement par une modification du modèle.

Afin de mieux reproduire la phénoménologie, nous n'imposerons plus que le modèle soit invariant sous des transformations chirales locales mais globales. Ceci va donc nous permettre de modifier le lagrangien du modèle σ -linéaire jauge. Nous commençons par écrire tous les termes contenant deux champs scalaires et deux champs vectoriels compatibles avec la symétrie chirale. Nous avons :

$$\mathcal{L}_{\Phi\Phi YY} = -\frac{h_1}{2} Y_\mu \Phi \cdot Y^\mu \Phi + \frac{h_2}{4} \Phi \cdot \Phi \text{tr} Y_\mu Y^\mu \quad (3.46)$$

et nous choisissons de supprimer les termes de self-interaction entre mésons vecteurs. De plus, on peut choisir de réécrire le terme cinétique pour les mésons vecteurs avec un terme de fixation de jauge :

$$\mathcal{L}_{\text{kin } Y} = -\frac{1}{8} \text{tr}(\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu)(\partial^\mu Y^\nu - \partial^\nu Y^\mu) - \frac{\xi}{4} \text{tr}(\partial_\mu Y^\mu)^2 \quad (3.47)$$

Lorsque l'on regarde les propagateurs des particules vectorielles, nous pouvons voir que ce terme joue un rôle identique aux champs rajoutés pour régulariser une théorie *via* la méthode de Pauli et Villars. Tout se passe alors comme si on rajoutait un terme qui va abaisser le degré de divergence des intégrales contenant des particules vectorielles :

$$G_Y^{\mu\nu}(p) = \frac{\frac{p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}}{m_Y^2}}{p^2 - m_Y^2} - \frac{\frac{p^\mu p^\nu}{m_Y^2}}{p^2 - m_Y^2/\xi} \quad (3.48)$$

Finalement, en tenant compte des modifications, nous obtenons un lagrangien de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - ig Y_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{h_1}{2} Y_\mu \Phi \cdot Y^\mu \Phi + \frac{h_2}{4} \Phi \cdot \Phi \text{tr} Y_\mu Y^\mu \\ & - \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 + c\sigma - \frac{1}{8} \text{tr}(\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu)(\partial^\mu Y^\nu - \partial^\nu Y^\mu) - \frac{\xi}{4} \text{tr}(\partial_\mu Y^\mu)^2 \\ & + \frac{m_0^2}{4} \text{tr} Y_\mu Y^\mu. \end{aligned} \quad (3.49)$$

où nous devons encore réaliser la redéfinition du champ σ ($\sigma \rightarrow \sigma_0 + \sigma$) et introduire les dérivées covariantes pour intégrer les interactions électrofaibles. Cette redéfinition va générer une fois de plus un terme de couplage direct entre le π et le a_1 , mais cette fois-ci on ne pourra pas l'éliminer par une redéfinition des champs. Par contre, nous pourrions resommer les séries de Dyson sous la forme schématique suivante :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad k \rightarrow & \text{---}\pi\text{---} = \text{---}\pi\text{---} + \text{---}\pi\text{---}\text{---}a_1\text{---}\pi\text{---} \\ \text{(b)} \quad k, \mu \rightarrow & \text{---}a_1\text{---} \nu = \text{---}a_1\text{---} + \text{---}a_1\text{---}\pi\text{---}a_1\text{---} \\ \text{(c)} \quad k \rightarrow & \text{---}\pi\text{---}\text{---}a_1\text{---} \mu \end{aligned}$$

FIG. 3.3 – Propagateurs contenant le terme de mélange $\pi - a_1$. (a) : propagateur du pion, (b) : propagateur du a_1 , (c) : terme de mélange.

cette resommation nous permettra de considérer un champ π “habillé” à l’arbre ainsi qu’un champ a_1 lui aussi “habillé”. Les propagateurs de ces champs prenant en compte le terme de mélange se mettent sous la forme :

$$G_\pi(p) = \frac{1}{p^2 - m_{\pi 0}^2 + \frac{g^2 \sigma_6^2 p^2}{\xi p^2 - m_{a_1}^2}} = \sum_{i=1}^2 \frac{Z_{\pi i}}{p^2 - m_{\pi i}^2} \quad (3.50)$$

$$G_{a_1}^{\mu\nu}(p) = \frac{\frac{p^\mu p^\nu}{m_{a_1}^2} - g^{\mu\nu}}{p^2 - m_{a_1}^2} + p^\mu p^\nu \sum_{i=1}^2 \frac{Z_{a_1 i}}{p^2 - m_{\pi i}^2} \quad (3.51)$$

où les expressions explicites de $m_{\pi 0}^2$, $m_{a_1}^2$, $Z_{\pi i}$, $m_{\pi i}^2$, $Z_{a_1 i}$ et $m_{\pi i}^2$ peuvent être trouvées dans [45]. Regardons maintenant quelle est la phénoménologie reproduite par ce modèle.

3.2.2 Phénoménologie

Nous allons donner ici quelques données expérimentales reproduites par le modèle [45], avec plusieurs jeux de paramètres. Nous pouvons voir ci-dessous la courbe des déphasages pour la diffusion π - π dans le canal $I = 1$, $J = 1$. Nous voyons clairement que la résonance apparaît vers 770 MeV, ce qui montre que ce canal est dominé par un échange du méson ρ entre les pions. De plus, le facteur de forme électromagnétique du pion est lui aussi parfaitement reproduit jusqu'à des énergies de $(1 \text{ GeV})^2$ environ.

Nous pouvons également générer les fonctions spectrales vectorielle et axiale. Dans le canal

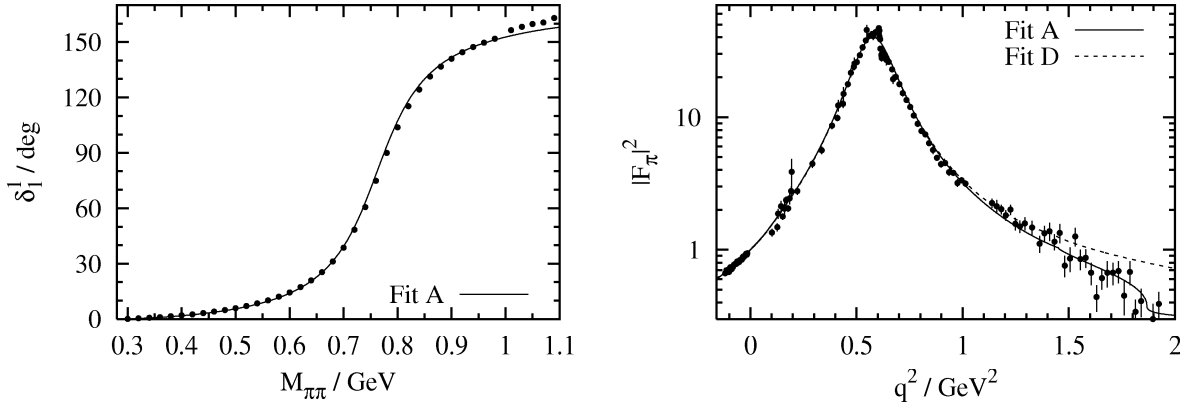


FIG. 3.4 – *A gauche* : déphasages $\pi - \pi$ dans le canal $I = 1$, $J = 1$. *A droite* : facteur de forme électromagnétique du pion.

vectoriel, les données expérimentales sont bien reproduites jusqu'à $(1 \text{ GeV})^2$ environ, alors qu'en ce qui concerne le canal axial on a une très bonne concordance entre les résultats expérimentaux et théoriques jusqu'à $(2 \text{ GeV})^2$. Ce modèle est donc un excellent candidat pour mener l'étude de la restauration de la symétrie chirale.

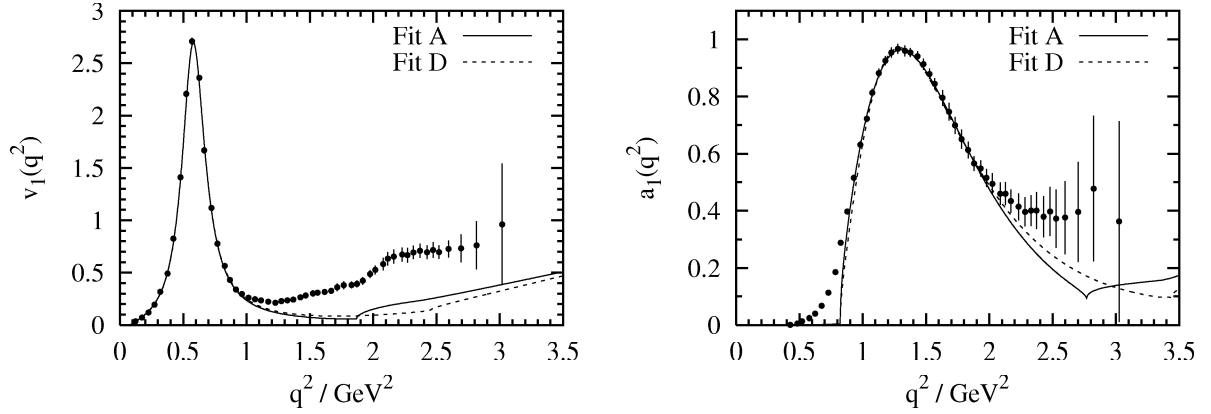


FIG. 3.5 – *A gauche* : fonction spectrale vectorielle représentée avec les données de ALEPH. *A droite* : fonction spectrale axiale représentée avec les données de ALEPH.

3.3 Equations du groupe de renormalisation

Dans cette partie nous allons déterminer les équations du groupe de renormalisation pour le modèle précédent. La méthode utilisée, bien qu'elle diffère légèrement de celles présentées dans le premier chapitre, n'en est pas moins totalement équivalente. La raison de ce choix réside dans le fait qu'elle illustre parfaitement la notion de “théorie effective valable jusqu'à une échelle Λ ”. Pour commencer, on repart de l'exemple du champ scalaire dont on donne le lagrangien nu :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda^2}{4} \phi^4 \quad (3.52)$$

Si on veut se placer à une certaine échelle Λ , on définit alors les champs renormalisés suivant :

$$\phi_R(\Lambda) = \sqrt{Z_\phi(\Lambda)} \phi \quad (3.53)$$

En particulier, nous pouvons facilement en déduire la relation qui lie les champs renormalisés à deux échelles infiniment proches Λ et $\Lambda + \delta\Lambda$:

$$\phi_R(\Lambda + \delta\Lambda) = \frac{\sqrt{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}}{\sqrt{Z_\phi(\Lambda)}} \phi_R(\Lambda) \quad (3.54)$$

Si on réexprime le lagrangien (3.52) en fonction des champs renormalisés à une échelle Λ , on aura :

$$\mathcal{L}_R(\Lambda) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R(\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda) - \frac{\mu^2(\Lambda)}{2} \phi_R^2(\Lambda) - \frac{\lambda^2(\Lambda)}{4} \phi_R^4(\Lambda) \quad (3.55)$$

De même, à une échelle $\Lambda + \delta\Lambda$ le lagrangien s'écrira :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\Lambda + \delta\Lambda) = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R(\Lambda + \delta\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda + \delta\Lambda) \\ & - \frac{\mu^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{2} \phi_R^2(\Lambda + \delta\Lambda) - \frac{\lambda^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{4} \phi_R^4(\Lambda + \delta\Lambda) \end{aligned} \quad (3.56)$$

soit en utilisant (3.54) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\Lambda + \delta\Lambda) = & \frac{1}{2} \frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} \partial_\mu \phi_R(\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda) \\ & - \frac{\mu^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{2} \frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} \phi_R^2(\Lambda) - \frac{\lambda^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{4} \frac{Z_\phi^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi^2(\Lambda)} \phi_R^4(\Lambda) \end{aligned} \quad (3.57)$$

On va maintenant réexprimer ce même lagrangien en fonction des self-énergies que l'on a calculées à une boucle. Pour ceci, on considère le propagateur d'une particule scalaire. Si l'on introduit ensuite la self-énergie sous la forme :

$$\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} q^2 \quad (3.58)$$

celui-ci s'écrit en effet :

$$G(q) = \frac{1}{(1 - \Sigma^{(2)}) q^2 - (\mu^2 + \Sigma^{(1)})} \quad (3.59)$$

On voit donc que la partie $\Sigma^{(1)}$ modifie la masse tandis que $\Sigma^{(2)}$ agit sur le champ lui-même (renormalisation de la fonction d'onde). A l'échelle $\Lambda + \delta\Lambda$ on pourra ainsi inclure la dépendance en énergie dans le lagrangien en fonction des self-énergies de la manière suivante (on ne considère ici que la partie quadratique dans les champs) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R,quad}(\Lambda + \delta\Lambda) = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R(\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda) [1 - \Sigma^{(2)}(\Lambda + \delta\Lambda) + \Sigma^{(2)}(\Lambda)] \\ & - \frac{\mu^2(\Lambda)}{2} \phi_R^2(\Lambda) \left[1 + \frac{\Sigma^{(1)}(\Lambda + \delta\Lambda)}{\mu(\Lambda)^2} - \frac{\Sigma^{(1)}(\Lambda)}{\mu(\Lambda)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Par identification avec le lagrangien (3.57), on peut alors en déduire les équations du groupe de renormalisation pour la fonction d'onde et pour la masse :

$$\frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} = 1 - \Sigma^{(2)}(\Lambda + \delta\Lambda) + \Sigma^{(2)}(\Lambda) \quad (3.61)$$

$$\mu^2(\Lambda + \delta\Lambda) \frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} = \mu^2(\Lambda) \left[1 + \frac{\Sigma^{(1)}(\Lambda + \delta\Lambda) - \Sigma^{(1)}(\Lambda)}{\mu^2(\Lambda)} \right] \quad (3.62)$$

soit encore :

$$\frac{\partial \ln Z_\phi(\Lambda)}{\partial \Lambda} = - \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \mu^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Sigma^{(1)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \mu^2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.64)$$

Si l'on considère maintenant l'expression explicite de la self-énergie :

$$\Sigma = -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} (\Lambda^2 - \mu^2 \ln \Lambda^2) \quad (3.65)$$

on réalise immédiatement qu'à l'ordre à une boucle, il n'y a pas de renormalisation pour la fonction d'onde et que l'équation pour le μ^2 conduit à :

$$\Lambda \frac{\partial \mu^2}{\partial \Lambda} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} (\mu^2 - \Lambda^2) \quad (3.66)$$

Sans surprise, on voit que l'on retrouve l'équation d'évolution pour la masse. De plus, la renormalisation de la fonction d'onde de nos champs est prise en compte dans les équations (voir (3.63) et (3.64)). L'équation (3.63) nous permet de déterminer la fonction $Z_\phi(\Lambda)$ et de répercuter son influence sur les variations des constantes de couplage.

Il ne nous reste plus qu'à faire de même avec la fonction à quatre points ; cette fois-ci, on doit considérer le lagrangien d'interaction, qui à une échelle $\Lambda + \delta\Lambda$ se met sous la forme :

$$\mathcal{L}_{R,int} = -\frac{\lambda^2(\Lambda)}{4} \phi_R^4(\Lambda) \left[1 + \frac{\Gamma(\Lambda + \delta\Lambda)}{\lambda^2(\Lambda)} - \frac{\Gamma(\Lambda)}{\lambda^2(\Lambda)} \right] \quad (3.67)$$

où $\Gamma(\Lambda)$ est la fonction à quatre points. Toujours par identification avec le lagrangien (3.57), on pourra alors en déduire l'équation d'évolution pour λ^2 :

$$\frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Gamma(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.68)$$

Si on remplace alors $\Gamma(\Lambda)$ par son expression explicite

$$\Gamma(\Lambda) = \frac{3\lambda^4}{32\pi^2} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 1 \right] \quad (3.69)$$

on arrive finalement au résultat

$$\Lambda \frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{3\lambda^4}{(4\pi)^2} \quad (3.70)$$

ce qui est bien conforme à ce qu'on avait dans les chapitres précédents. Nous pouvons faire ici une remarque importante concernant le cas du modèle σ -linéaire où on a réalisé une redéfinition du champ ϕ suivant $\phi \rightarrow \phi_0 + \phi$. Dans ce cas, nous pouvons avoir accès à l'équation d'évolution de λ^2 *via* le terme de masse. Le lagrangien est en effet de la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{3\lambda^2 \phi_0^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda^2}{4} \phi^4 + \dots \quad (3.71)$$

Cette fois-ci, on supposera que la self-énergie est définie suivant :

$$\Sigma = \Sigma^{(1)} q^2 + \Sigma^{(2)} \phi_0^2 + \Sigma^{(3)} \quad (3.72)$$

avec le propagateur du champ dont l'expression est :

$$G(q) = \frac{1}{(1 - \Sigma^{(1)})q^2 - (\mu^2 + \Sigma^{(3)}) - \phi_0^2(\lambda^2 + \Sigma^{(2)})} \quad (3.73)$$

Nous pourrions alors écrire le lagrangien (3.71) à une échelle $\Lambda + \delta\Lambda$ de deux manières :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\Lambda + \delta\Lambda) = & \frac{1}{2} \frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} \partial_\mu \phi_R(\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda) - \frac{\mu^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{2} \frac{Z_\phi(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi(\Lambda)} \phi_R^2(\Lambda) \\ & - \frac{3\lambda^2(\Lambda + \delta\Lambda)\phi_0^2}{2} \frac{Z_\phi^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi^2(\Lambda)} \phi_R^2(\Lambda) - \frac{\lambda^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{4} \frac{Z_\phi^2(\Lambda + \delta\Lambda)}{Z_\phi^2(\Lambda)} \phi_R^4(\Lambda) + \dots \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R(\Lambda) \partial^\mu \phi_R(\Lambda) [1 - \Sigma^{(1)}(\Lambda + \delta\Lambda) + \Sigma^{(1)}(\Lambda)] \\ & - \frac{\mu(\Lambda)^2}{2} \phi_R^2(\Lambda) \left[1 + \frac{\Sigma^{(3)}(\Lambda + \delta\Lambda)}{\mu^2(\Lambda)} - \frac{\Sigma^{(3)}(\Lambda)}{\mu^2(\Lambda)} \right] \\ & - \frac{3\lambda^2(\Lambda)\phi_0^2}{2} \phi_R^2(\Lambda) \left[1 + \frac{\Sigma^{(2)}(\Lambda + \delta\Lambda)}{\phi_0^2\lambda^2(\Lambda)} - \frac{\Sigma^{(2)}(\Lambda)}{\phi_0^2\lambda^2(\Lambda)} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.75)$$

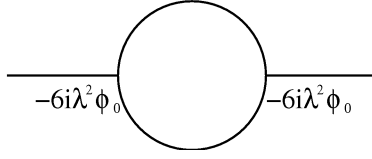
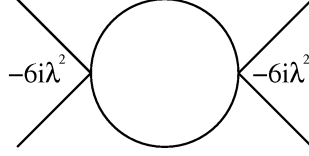
On peut donc voir de manière évidente que les équations d'évolution pour la fonction d'onde et pour la masse sont identiques à (3.63) et (3.64). Concernant la fonction à quatre points, on peut cette fois-ci regarder quelle est la modification apportée à la masse au travers des termes proportionnels à ϕ_0 . Toujours par identification entre (3.74) et (3.75), on trouve l'équation d'évolution pour λ^2 :

$$\frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\phi_0^2} \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \lambda^2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma^{(1)}}{\partial \Lambda} \quad (3.76)$$

Dans notre cas, on n'a pas de renormalisation de la fonction d'onde et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\phi_0^2} \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.77)$$

On remarque que les équations (3.68) et (3.77) sont très similaires. Ceci s'explique si on regarde les contributions aux deux quantités ; les diagrammes qui vont contribuer pour la self-énergie $\Sigma^{(2)}$ et pour la fonction à trois points Γ sont respectivement :

FIG. 3.6 – Diagramme à une boucle qui contribue pour la self-énergie $\Sigma^{(2)}$.FIG. 3.7 – Renormalisation de la fonction de vertex à quatre points Γ .

On voit clairement ici que la relation entre ces deux quantités est :

$$\Sigma^{(2)} = \phi_0^2 \Gamma \quad (3.78)$$

et finalement on vérifie bien que les équations (3.68) et (3.77) sont identiques. Nous pouvons donc avoir accès à la modification de la constante de couplage à quatre points *via* l'étude d'un des termes de masse.

On va maintenant écrire ces équations dans le cas précis de notre modèle. On notera de manière générale Y les champs vectoriels et ϕ les champs scalaires. Pour les décompositions des self-énergies, on choisira :

$$\Sigma_\phi = \Sigma_\phi^{(1)} + \sigma_0^2 \Sigma_\phi^{(2)} + q^2 \Sigma_\phi^{(3)} \quad (3.79)$$

pour les particules scalaires. Pour les particules vectorielles, on va décomposer sur les tenseurs longitudinal et transverse :

$$\Sigma_Y^{\mu\nu}(q) = \Sigma_Y^t \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \Sigma_Y^l \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (3.80)$$

avec, pour chacune de ces deux expressions :

$$\Sigma_Y^t(q^2) = \Sigma_Y^{t(1)} + \sigma_0^2 \Sigma_Y^{t(2)} + q^2 \Sigma_Y^{t(3)} \quad (3.81)$$

$$\Sigma_Y^l(q^2) = \Sigma_Y^{l(1)} + \sigma_0^2 \Sigma_Y^{l(2)} + q^2 \Sigma_Y^{l(3)} \quad (3.82)$$

Une fois les self-énergies calculées explicitement, nous pouvons alors simplifier des termes dans les expressions précédentes, on a :

$$\Sigma_Y^t(q^2) = \Sigma_Y^{t(1)} + q^2 \Sigma_Y^{t(3)} \quad (3.83)$$

$$\Sigma_Y^l(q^2) = \Sigma_Y^{l(1)} + \sigma_0^2 \Sigma_Y^{l(2)} \quad (3.84)$$

Nous obtenons ainsi les équations du groupe de renormalisation pour notre modèle :

$$\frac{\partial \mu^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Sigma_\phi^{(1)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \mu^2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma_\phi^{(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Sigma_\phi^{(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \lambda^2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma_\phi^{(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial m_0^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Sigma_Y^{l(1)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + m_0^2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma_Y^{t(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial h_2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = -\frac{\partial \Sigma_\rho^{l(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + h_2(\Lambda) \frac{\partial \Sigma_Y^{t(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial h_1(\Lambda)}{\partial \Lambda} = -\frac{\partial \Sigma_{a_1}^{l(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \Sigma_\rho^{l(2)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + h_1(\Lambda) \frac{\partial \Sigma_Y^{t(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Lambda} = \frac{iq_\mu}{q^2 \sigma_0} \frac{\partial \Sigma_{\pi a_1}^\mu(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{g(\Lambda)}{2} \frac{\partial \Sigma_\phi^{(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{g(\Lambda)}{2} \frac{\partial \Sigma_y^{t(3)}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (3.90)$$

Une fois prises en compte les expressions explicites des self-énergies (voir annexe C), le système précédent se réduit à :

$$\Lambda \frac{\partial \mu^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{3}{8\pi^2 \xi^2} [(g^2 - h_1 - 2h_2)(m_0^2 - \Lambda^2 \xi) + (3g^2 \mu^2 + 2\lambda^2(\Lambda^2 - \mu^2) + (h_1 + 2h_2)(\Lambda^2 - 3m_0^2))\xi^2] \quad (3.91)$$

$$\Lambda \frac{\partial \lambda^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{-3}{8\pi^2 \xi^2} [g^4 + (h_1^2 + 2h_1 h_2 + 2h_2^2)(1 + 3\xi^2) + 4\lambda^2 \xi^2 - g^2(2h_1 + 2h_2 + \lambda^2 \xi(1 + 3\xi))] \quad (3.92)$$

$$\Lambda \frac{\partial m_0^2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{24\pi^2} [6(g^2 - h_1 - 2h_2)(\Lambda^2 - \mu^2) - g^2 m_0^2] \quad (3.93)$$

$$\Lambda \frac{\partial h_1(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{-1}{24\pi^2 \xi} [-3g^4 + g^2(h_1(3 + \xi) - 6(h_2 + \lambda^2 \xi)) + 3h_1((h_1 + 2h_2)(1 + 3\xi) + 2\lambda^2 \xi)] \quad (3.94)$$

$$\Lambda \frac{\partial h_2(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{-1}{48\pi^2 \xi} [12g^4 - 2g^2(12h_1 + 9h_2 - h_2 \xi + 6\lambda^2 \xi) + 3(4h_1 \lambda^2 \xi + h_1^2(1 + 3\xi) + 2h_2(h_2(1 + 3\xi) + 6\lambda^2 \xi))] \quad (3.95)$$

$$\Lambda \frac{\partial g(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{48\pi^2 \xi} [-18(2h_1 + h_2)\xi + g^2(-3 + 26\xi)] g \quad (3.96)$$

Pour des raisons mathématiques il est indispensable d'effectuer un changement de variables qui permette d'éliminer les termes en Λ^2 dans les équations (3.91) et (3.93). Pour ce faire, nous introduisons les quantités adimensionnées $X = \frac{\Lambda^2}{\mu^2}$ et $Y = \frac{m_0^2}{\mu^2}$. Avec ces variables, on obtient alors :

$$\Lambda \frac{\partial X}{\partial \Lambda} = 2X - \frac{3X}{8\pi^2 \xi^2} [(g^2 - h_1 - 2h_2)(Y - \xi X) + \{3g^2 + 2\lambda^2(X - 1) + (h_1 + 2h_2)(X - 3Y)\} \xi^2] \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial Y}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{24\pi^2} [6(g^2 - h_1 - 2h_2)(X - 1) - g^2 Y] \\ &\quad - \frac{3Y}{8\pi^2 \xi} [(g^2 - h_1 - 2h_2)(Y - \xi X) + \{3g^2 + 2\lambda^2(X - 1) + (h_1 + 2h_2)(X - 3Y)\} \xi^2] \end{aligned} \quad (3.98)$$

C'est finalement ces équations dont la résolution va nous apporter des informations sur la restauration de la symétrie chirale. Ce système d'équations différentielles non linéaires couplées est celui qui va contrôler l'évolution de nos constantes de couplage. Comme nous l'avons vu précédemment, les renormalisations des fonctions d'onde sont incluses dans celles des constantes de couplage. Avant d'aller plus loin dans la résolution, nous pouvons faire quelques remarques.

Pour obtenir ce système, nous avons calculé les fonctions à deux points à une boucle qui peuvent être générées par le modèle (voir annexe C pour les différentes contributions à une boucle, ainsi que les règles de Feynman correspondantes). Il a alors été possible de vérifier explicitement sur les fonctions régularisées que : premièrement, le théorème de Goldstone est satisfait (on a bien des pions de masse nulle dans la limite chirale), deuxièmement, le propagateur du photon à une boucle est bien transverse et les contributions directes issues des couplages avec toutes les particules du secteur hadronique s'annulent. En un mot, la régularisation de ce modèle préserve bien toutes les propriétés de symétrie.

3.4 Diagramme de flux - Points fixes

Le premier résultat intéressant à extraire de nos équations est la détermination des points fixes. Parmi tous ceux qui peuvent exister, deux sont particulièrement importants : ceux qui correspondent respectivement à la restauration de la symétrie chirale à la Ginzburg-Landau et la manifestation vectorielle. Dans le premier cas, le π et le σ deviennent partenaires chiraux dégénérés en masses ainsi que les particules vectorielles ρ et a_1 . Par contre, dans le cas de la manifestation vectorielle, c'est maintenant avec le ρ (a_1) que le π (σ) va devenir dégénéré. Un des principaux intérêts suscités par cette manifestation vectorielle est le fait que dans le cadre d'un modèle particulier (HLS), elle a permis de reproduire la dominance vectorielle à basse énergie automatiquement, c'est-à-dire sans avoir été incluse explicitement dans le modèle (la dominance vectorielle est en effet très importante pour l'interprétation des spectres en dileptons).

De manière explicite, ces deux types de restauration de la symétrie chirale se traduisent par :

$$GL \begin{cases} m_\pi^2 &= m_\sigma^2 \\ m_\rho^2 &= m_{a_1}^2 \end{cases} \quad (3.99)$$

$$VM \begin{cases} m_\pi^2 &= m_\rho^2 \\ m_\sigma^2 &= m_{a_1}^2 \end{cases} \quad (3.100)$$

ce qui va engendrer des contraintes entre les paramètres. Techniquement, il faut ici faire attention au terme de mélange entre le π et le a_1 . En effet, le propagateur du pion incluant le terme de mélange $\pi - a_1$ s'écrit :

$$G_\pi(p) = \frac{1}{p^2 - m_{\pi 0}^2 + \frac{g^2 \sigma_0^2 p^2}{\xi p^2 - m_{a_1}^2}} \quad (3.101)$$

où m_{π_0} est la masse du pion sans tenir compte du terme de mélange avec le a_1 . La masse du pion étant définie comme le pôle du propagateur, m_π^2 doit alors vérifier la condition :

$$m_\pi^2 - m_{\pi_0}^2 + \frac{g^2 \sigma_0^2 m_\pi^2}{\xi m_\pi^2 - m_{a_1}^2} = 0 \quad (3.102)$$

En ce qui concerne les autres masses du modèle, elles s'écrivent comme :

$$m_{\pi_0}^2 = \mu^2 + \sigma_0^2 \lambda^2 \quad (3.103)$$

$$m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\sigma_0^2 \lambda^2 \quad (3.104)$$

$$m_\rho^2 = m_0^2 + h_2 \sigma_0^2 \quad (3.105)$$

$$m_{a_1}^2 = m_0^2 + (h_1 + h_2) \sigma_0^2 \quad (3.106)$$

Supposons tout d'abord que la symétrie soit restaurée à la Ginzburg-Landau ; dans ce cas, l'égalité des masses entre les particules vectorielles nous force à imposer $h_1 = 0$. L'égalité (3.102) s'écrit alors ($m_\pi = m_\sigma$, $m_\rho = m_{a_1}$) :

$$m_\sigma^2 - m_{\pi_0}^2 + \frac{g^2 \sigma_0^2 m_\sigma^2}{\xi m_\sigma^2 - m_0^2 - h_2 \sigma_0^2} = 0 \quad (3.107)$$

L'équation (3.96) conduit au fait que $g = 0$ (l'annulation du terme entre crochets conduit à une incompatibilité). Cela implique immédiatement, d'après (3.95), que h_2 est nul également. De même pour λ^2 avec (3.92). On voit donc que la dégénérescence des masses ne peut être obtenue par un jeu de paramètres autre que $g = \lambda = h_1 = h_2 = 0$, c'est-à-dire un point fixe "trivial".

Considérons maintenant le schéma de restauration type manifestation vectorielle. Il est facile de montrer, à partir de l'écriture de l'égalité (3.100) qu'on a la relation suivante :

$$(h_1 - 2\lambda^2)(\xi m_\pi^2 - m_{a_1}^2) = g^2 m_\pi^2 \quad (3.108)$$

A nouveau, on sait qu'on a un point fixe à $g = 0$ (dans ce cas particulier, on n'a plus de couplage entre le π et le a_1). Par conséquent, l'équation (3.108) se réduit à :

$$(h_1 - 2\lambda^2)(\xi m_{\pi_0}^2 - m_{a_1}^2) = 0 \quad (3.109)$$

soit

$$h_1 = 2\lambda^2 \quad (3.110)$$

La seconde partie de l'égalité (3.100) donne quant à elle :

$$\mu^2 + \lambda^2 \sigma_0^2 = m_0^2 + h_2 \sigma_0^2 \quad (3.111)$$

La même démarche que précédemment conduit à $h_1 = h_2 = \lambda = g = 0$ et à $\mu^2 = m_0^2$. La manifestation vectorielle conduit donc à un jeu de paramètres nuls également.

Dans la référence [20], les auteurs avaient déterminé les points fixes non triviaux dans le cas du modèle HLS. Ils avaient notamment montré qu'un de ces points fixes correspondait à la manifestation vectorielle, c'est-à-dire qu'il existait un jeu de constantes de couplage tel que $m_\pi = m_\rho$. Le but était de savoir si la prise en compte d'une particule scalaire modifiait ou non ce résultat. Dans le cadre de notre modèle, il n'est pas possible de trancher puisque le point fixe correspondant est trivialement satisfait ; cette absence de point fixe non trivial ne pouvait évidemment pas être prédite a priori.

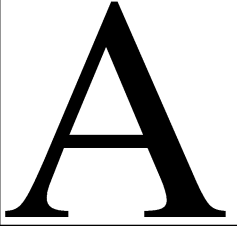
Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons passé en revue quelques unes des différentes méthodes existantes afin d'obtenir les équations du groupe de renormalisation et nous avons ensuite développé une nouvelle méthode de régularisation des intégrales divergentes qui permette de respecter les symétries des modèles étudiés. Nous avons finalement appliqué cette méthode à deux exemples de physique des particules et de matière hadronique : QED en quatre et cinq dimensions ainsi qu'un modèle phénoménologique chirale.

Concernant QED en cinq dimensions, le but n'était pas d'obtenir des résultats physiques permettant de reproduire des données expérimentales, mais plutôt de développer des méthodes qui puissent permettre de traiter d'autres modèles à dimensions supplémentaires contenant des modes de Kaluza-Klein. Ces modèles pourraient être par exemple une extension du modèle standard en 5 dimensions ou toute autre théorie comprenant les "bonnes" particules et qui reproduise correctement la phénoménologie aux basses énergies. Un autre prolongement possible est d'effectuer des calculs à deux boucles, ou d'introduire d'autres dimensions supplémentaires. Dans ce dernier cas, la difficulté sera d'autant plus importante que le nombre de dimensions supplémentaires est élevé (par exemple, en six dimensions, QED contient des fermions à huit composantes qui se dédoubleront en deux fermions à quatre composantes une fois la théorie compactifiée. On supprimera alors l'une des deux solutions qui correspond à un cas non physique : des fermions de masse négative). Jusqu'à présent, les différents auteurs ayant étudié le sujet se sont heurtés à des difficultés mathématiques qu'ils utilisaient (entre autres ils ne disposaient pas de méthodes permettant de régulariser les théories de manière à respecter les symétries et ils utilisaient les identités de Ward afin de modifier leurs résultats de manière à respecter les symétries *a posteriori*).

Ensuite, l'application la plus intéressante au niveau physique est sans aucun doute l'étude de la restauration de la symétrie chirale. Malheureusement, celle-ci est située à des énergies où le développement perturbatif de QCD ne s'applique pas ; de même, les théories effectives du type modèle σ -linéaire ne reproduisent que les données aux basses énergies et il faut utiliser le groupe de renormalisation pour obtenir des informations à des énergies plus importantes. Il est ici fondamental de respecter les symétries du modèle (et particulièrement l'invariance sous des transformations globales) afin d'étudier la restauration de la symétrie chirale. Jusqu'à présent, il existe deux scénarios de restauration : la restauration à la Ginzburg-Landau (où les π , σ d'une part et les ρ , a_1 d'autre part sont partenaires

chiraux dégénérés en masses) et la manifestation vectorielle (où les π , ρ et les σ , a_1 sont cette fois-ci partenaires chiraux) qui présente la propriété intéressante de reproduire la dominance vectorielle jusqu'à présent introduite à la main dans les modèles. La nouveauté dans mon travail a consisté à considérer les quatre mésons π , σ , ρ et a_1 dans un même modèle, ce qui n'avait pas été réalisé jusqu'à présent. Par conséquent, il était peu probable de pouvoir observer simultanément (suivant les valeurs des paramètres) l'une ou l'autre des manifestations dans les modèles étudiés. D'après notre étude, notre modèle est compatible avec les deux scénarios de restauration. Les perspectives les plus intéressantes de ce côté sont donc le raccordement à la Wilson avec un développement perturbatif de QCD qui nous permettrait de sélectionner une des deux restaurations possibles, ou éventuellement de trouver un angle de mélange entre les représentations. La deuxième perspective serait d'étendre cette étude à température et/ou à densité finies, puis d'essayer de calculer des observables physiques caractéristiques de la restauration de la symétrie chirale dans notre modèle.



Théorème de découplage

Le théorème de découplage, ou théorème d'Appelquist-Carazzone [13] s'avère être très utile lorsque l'on souhaite construire une théorie effective connaissant la théorie plus générale, c'est-à-dire, le plus souvent, lorsqu'on souhaite extraire la physique de basse énergie d'une théorie contenant des modes lourds. Aux faibles impulsions, le théorème stipule que les champs lourds se découplent et que le comportement basse énergie est donné par un lagrangien effectif ne contenant que des champs légers. En pratique, Appelquist et Carazzone ont montré que le rôle des champs lourds dans le comportement de la théorie aux faibles échelles (c'est-à-dire dans des diagrammes ne contenant que des champs légers sur les pattes externes) était de modifier les constantes de couplage et les fonctions d'ondes des champs du lagrangien effectif.

Si l'on s'en tient au principe, il est même possible d'appliquer le théorème de découplage à chaque fois que l'on atteint la masse de l'une des particules de la théorie [14]. A l'échelle de la masse de cette particule, les paramètres de la théorie effective pourront alors être déduits de ceux de la théorie de plus haute énergie par un raccordement à la Wilson [38].

De manière très générale, si nous considérons un lagrangien contenant un champ lourd H et plusieurs champs légers l_i , nous pouvons définir une action effective Z_{eff} à partir de la fonctionnelle génératrice suivant [39] :

$$e^{iZ_{eff}[l_i]} = \frac{\int [dH] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(H, l_i)}}{\int [dH] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(H, 0)}} \quad (\text{A.1})$$

de telle sorte que cette action effective ne dépend plus explicitement des champs lourds, mais que ceux-ci peuvent tout de même avoir une influence indirecte (*via* des facteurs de forme au niveau des vertex d'interaction). Afin de comprendre comment cela fonctionne en pratique, nous allons considérer le cas d'un exemple simple dans lequel les champs légers l_i apparaissent à travers un courant J linéairement couplé à H :

$$\mathcal{L}(H, J) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H \partial^\mu H - m_H^2 H^2) + JH \quad (\text{A.2})$$

En introduisant les notations :

$$\mathcal{D} = \square + m_H^2 \quad (\text{A.3})$$

on a :

$$\mathcal{D}\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y) \quad (\text{A.4})$$

de telle sorte que :

$$\mathcal{D}^{-1}J = - \int d^4y \Delta_F(x-y)J(y) \quad (\text{A.5})$$

puis :

$$\int d^4x J\mathcal{D}^{-1}J = - \int d^4x \int d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y) \quad (\text{A.6})$$

On réécrit alors l'action suivant :

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}(H, J) &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}H\mathcal{D}H + JH \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x [(H - \mathcal{D}^{-1}J)\mathcal{D}(H - \mathcal{D}^{-1}J) - J\mathcal{D}^{-1}J] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x [H'\mathcal{D}H' - J\mathcal{D}^{-1}J] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$H'(x) = H(x) + \int d^4x \Delta_F(x-y)J(y) \quad (\text{A.8})$$

Tout ceci nous permet alors de calculer :

$$\begin{aligned} e^{iZ_{eff}[J]} &\equiv \frac{\int [dH] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(H, J)}}{\int [dH] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(H, 0)}} \\ &= \frac{\int [dH'] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [H'\mathcal{D}H' - J\mathcal{D}^{-1}J]}}{\int [dH] e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}H\mathcal{D}H]}} \\ &= e^{\frac{i}{2} \int d^4x J\mathcal{D}^{-1}J} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

D'où l'expression de l'action effective $Z_{eff}[J]$:

$$Z_{eff}[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y) \quad (\text{A.10})$$

Afin d'obtenir un lagrangien local, on développe le courant J aux faibles distances :

$$J(y) = J(x) + (y-x)^\mu [\partial_\mu J(y)]_{y=x} + \dots \quad (\text{A.11})$$

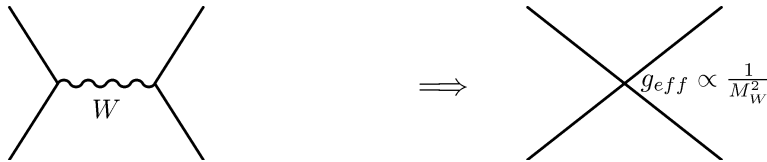
et on ne garde que le premier terme. On utilise ensuite :

$$\int d^4x \Delta_F(x-y) = -\frac{1}{m_H^2} \quad (\text{A.12})$$

pour parvenir au résultat final

$$Z_{eff}[J] = \int d^4x \frac{1}{2m_H^2} J(x)J(x) + \dots \quad (\text{A.13})$$

les termes supplémentaires ayant été supprimés en puissances de m_H . On obtient donc une action ne contenant que les champs légers, le mode lourd apparaissant dans une constante de couplage. De manière schématique, on peut représenter l' "absorption" du champ lourd dans la constante de couplage par la figure suivante :



où on a considéré ici à titre d'exemple la diffusion électron-positron *via* l'échange d'un W , ce dernier n'influençant que très peu la diffusion à basse énergie et pouvant donc être remplacé par une interaction ponctuelle.

Annexe B

Table des intégrales

Dans cette appendice, nous donnons la liste complète et détaillée des intégrales qui ont été régularisées *via* notre méthode. Comme nous l'avons déjà précisé, nous ne donnons que les parties divergentes.

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]} = -\frac{1}{(4\pi)^2} [\Lambda^2 - m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.1})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} [\Lambda^2 - 2m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.3})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{2(4\pi)^2} [\Lambda^2 - m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.4})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^3} = \frac{1}{(4\pi)^2} \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.5})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = \frac{g^{\mu\nu}}{4(4\pi)^2} \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.6})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^4}{[k^2 - m^2]^3} = -\frac{1}{(4\pi)^2} [\Lambda^2 - 3m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.7})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = -\frac{1}{4(4\pi)^2} [2\Lambda^2 - 3m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.8})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - m^2]^3} = -\frac{1}{8(4\pi)^2} [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}] [\Lambda^2 - m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.9})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^4}{[k^2 - m^2]^4} = \frac{1}{(4\pi)^2} \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.10})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^4} = \frac{g^{\mu\nu}}{4(4\pi)^2} \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.11})$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - m^2]^4} = \frac{1}{24(4\pi)^2} [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}] \log(\Lambda^2) \quad (\text{B.12})$$

$$\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{k^6}{[k^2 - m^2]^4} = -\frac{1}{(4\pi)^2} [\Lambda^2 - 4m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.13})$$

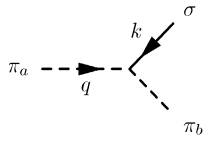
$$\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{k^4 k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^4} = -\frac{g^{\mu\nu}}{2(4\pi)^2} [\Lambda^2 - 2m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.14})$$

$$\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{k^2 k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - m^2]^4} = -\frac{1}{24(4\pi)^2} [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}] [3\Lambda^2 - 4m^2 \log(\Lambda^2)] \quad (\text{B.15})$$

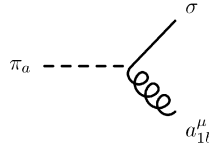
Annexe C Diagrammes à une boucle du lagrangien chiral effectif

Cette annexe est destinée à donner les règles de Feynman issus du modèle chiral effectif [45], ainsi que les diagrammes à une boucle qui vont contribuer aux fonctions de Green à deux points.

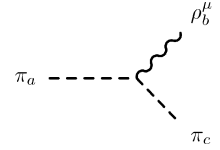
C.1 Règles de Feynman



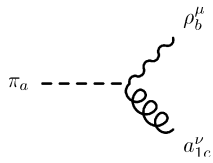
$$-2i\lambda^2\sigma_0\delta_{ab}$$



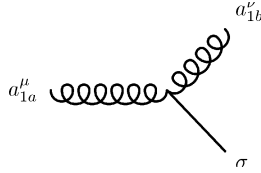
$$g_1\delta_{ab}(k^\mu - q^\mu)$$



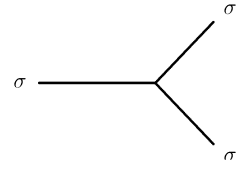
$$g_1\varepsilon_{abc}(k^\mu + 2q^\mu)$$



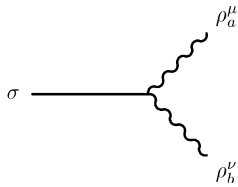
$$ih_1\sigma_0\varepsilon_{abc}g^{\mu\nu}$$



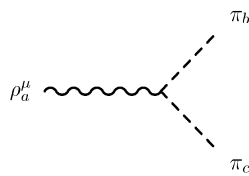
$$-ih_1\sigma_0\varepsilon_{abc}g^{\mu\nu}$$



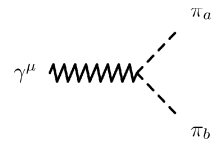
$$-6i\lambda^2\sigma_0$$



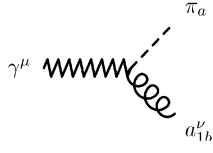
$$2ih_2\sigma_0\delta_{ab}g^{\mu\nu}$$



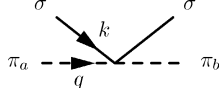
$$-g\varepsilon_{abc}q^\mu$$



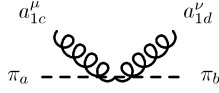
$$-e\varepsilon_{3ab}(2k^\mu + q^\mu)$$



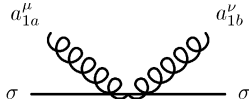
$$-ie g_1 \sigma_0 \varepsilon_{3ab} g^{\mu\nu}$$



$$-2i\lambda^2 \delta_{ab}$$



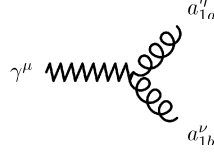
$$i(h_1 \delta_{ad} \delta_{bc} + h_1 \delta_{ac} \delta_{bd} + 2h_2 \delta_{ab} \delta_{cd}) g^{\mu\nu}$$



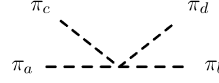
$$2i(h_1 + h_2) \delta_{ab} g^{\mu\nu}$$



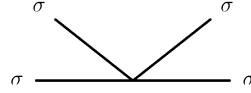
$$ie^2(\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b})[(\xi - 1)g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + 2g^{\mu\nu} g^{\eta\rho} + (\xi - 1)g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}]$$



$$e\varepsilon_{3ab}[(2k^\mu + q^\mu)g^{\nu\eta} + ((\xi - 1)k^\eta - q^\eta)g^{\mu\nu} + ((\xi - 1)k^\nu + \xi q^\nu)g^{\mu\eta}]$$



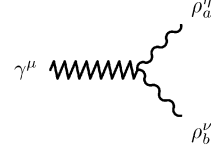
$$-2i\lambda^2(\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc})$$



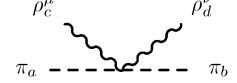
$$-6i\lambda^2$$



$$2ie^2(\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) g^{\mu\nu}$$



$$e\varepsilon_{3ab}[(2k^\mu + q^\mu)g^{\nu\eta} + ((\xi - 1)k^\eta - q^\eta)g^{\mu\nu} + ((\xi - 1)k^\nu + \xi q^\nu)g^{\mu\eta}]$$



$$-i(h_1 \delta_{ad} \delta_{bc} + h_1 \delta_{ac} \delta_{bd} - 2(h_1 + h_2) \delta_{ab} \delta_{cd}) g^{\mu\nu}$$



$$2ih_2 \delta_{ab} g^{\mu\nu}$$



$$ie^2(\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b})[(\xi - 1)g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + 2g^{\mu\nu} g^{\eta\rho} + (\xi - 1)g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}]$$

C.2 Contributions à une boucle aux fonctions de Green à deux points

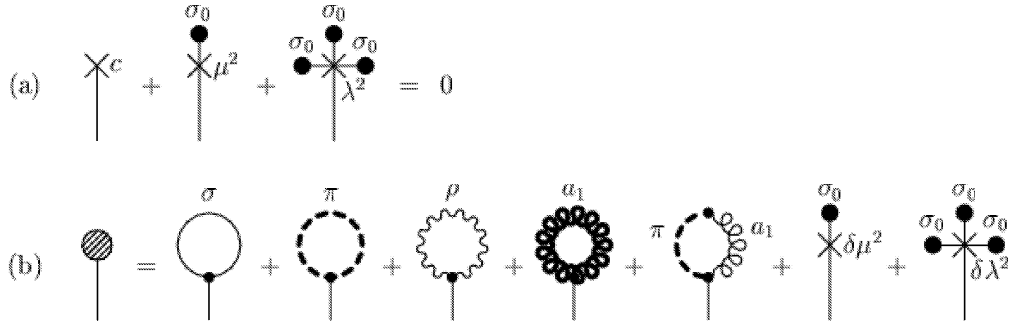


FIG. C.1 – (a) Représentation de l'équation de minimisation du potentiel permettant de trouver la valeur moyenne du champ σ dans le vide. (b) Diagrammes en tadpole à une boucle.

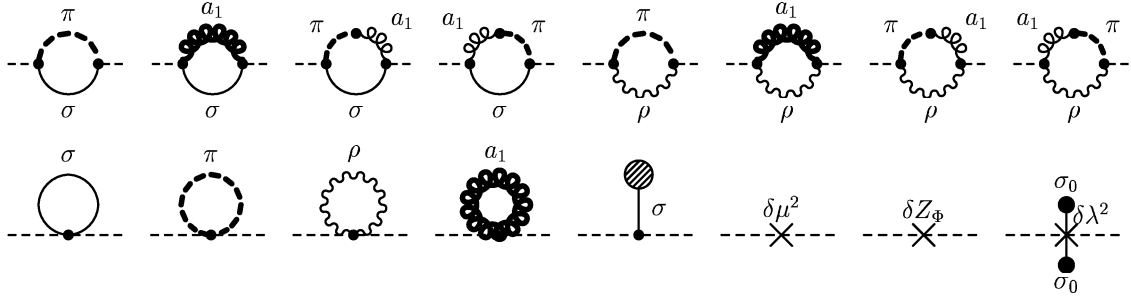


FIG. C.2 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du pion.

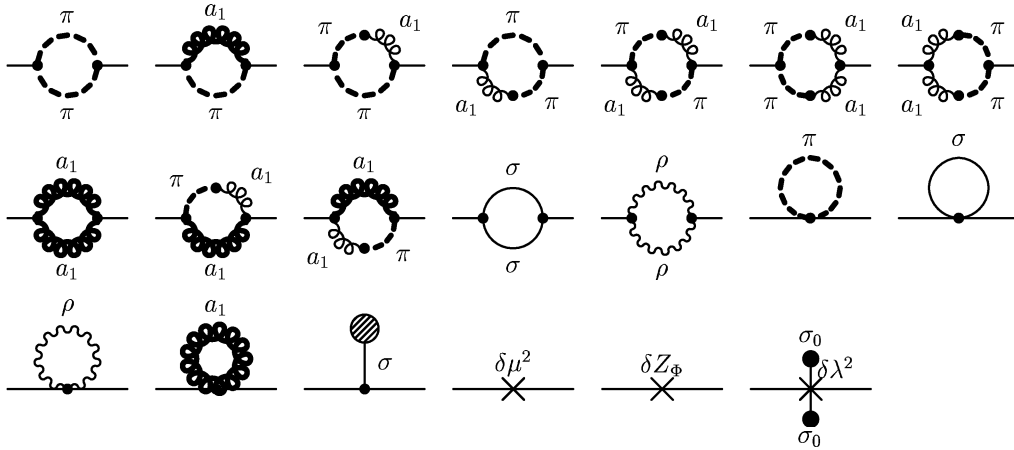


FIG. C.3 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du sigma.

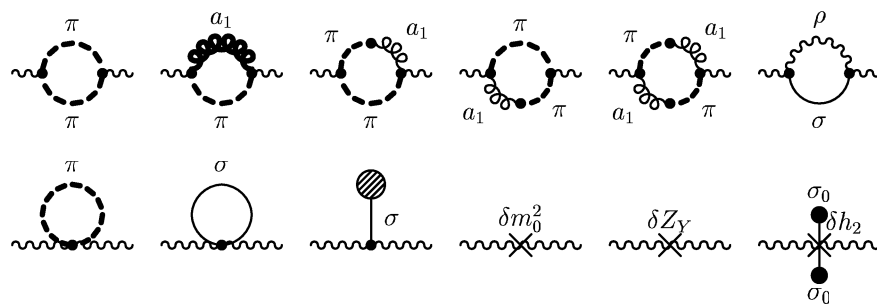


FIG. C.4 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du rho.

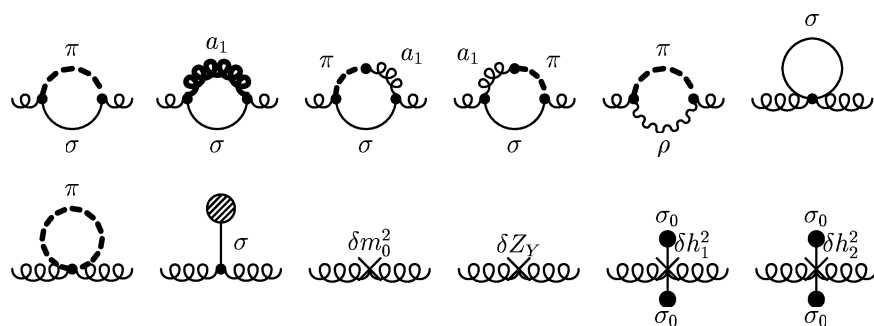
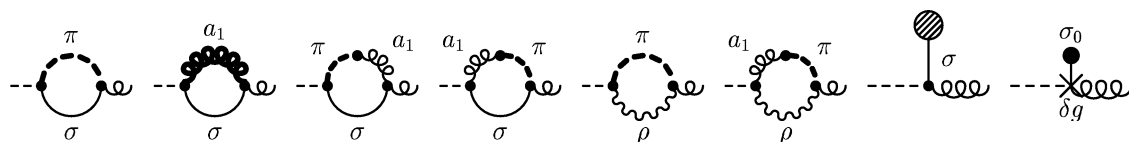
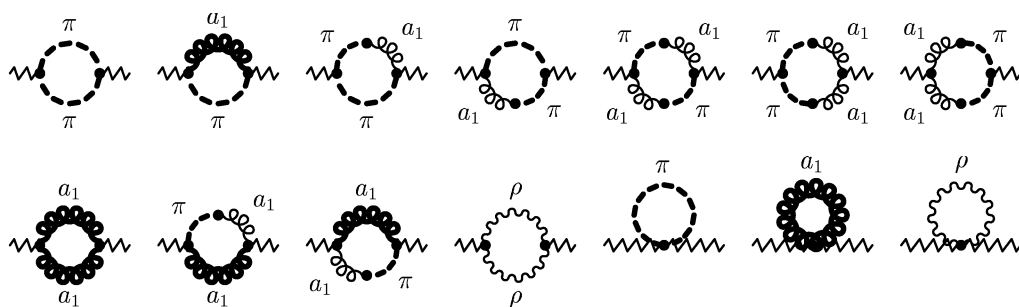

FIG. C.5 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du a_1 .

FIG. C.6 – Diagrammes contribuant au terme de mélange $\pi - a_1$ à une boucle.


FIG. C.7 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du photon.

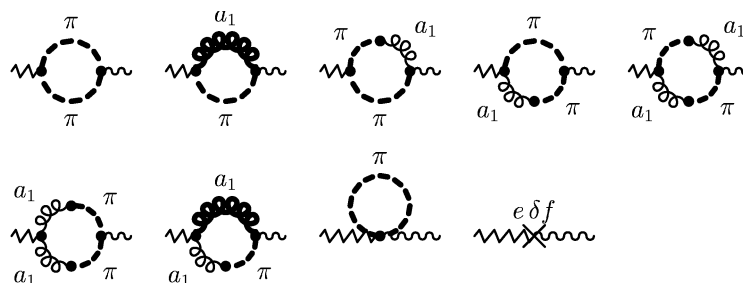


FIG. C.8 – Diagrammes contribuant au terme de mélange $\rho - \gamma$ à une boucle.

Bibliographie

- [1] Lamb, W.E. Jr. and R.C. Rutherford, Phys. Rev. **72**, pp. 241-243
- [2] Nafe, J.E. , E.B. Nelson and I.I. Rabi, Phys. Rev. **71**, pp. 914-915
- [3] Schwinger, J., Phys. Rev. **73**, pp. 416-417
- [4] Schwinger, J., Phys. Rev. **74**, pp. 1439-1461
- [5] Feynman, R.P., Phys. Rev. **76**, pp. 749-768
- [6] Feynman, R.P., Phys. Rev. **76**, pp. 769-789
- [7] Dyson, F.J., Phys. Rev. **75**, pp. 486-502
- [8] Dyson, F.J., Phys. Rev. **75**, pp. 1736-1755
- [9] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12**, 75 (1974).
- [10] Weinberg, S., Phys. Lett. B **91**, pp. 51-55
- [11] Lepage, G. Peter, "What is renormalization?", preprint, CLNS, 89/970
- [12] Wilson, K.G., Sci. Am. **241**, pp. 158-179
- [13] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys. Rev. D **11** (1975) 2856.
- [14] Georgi, H., "Effective Quantum theories", in The New Physics, Paul Davies, Cambridge University Press, pp. 4446-4457
- [15] Weinberg, Steven , Int. J. Mod. Phys. A **1/1**, pp. 135-145
- [16] Nigel Goldenfeld, "Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group", Frontiers in Physics, 1992
- [17] L. S. Brown, "Quantum Field Theory," *Cambridge, UK : Univ. Pr. (1992) 542 p*
- [18] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [19] M. J. G. Veltman, Acta Phys. Polon. B **12** (1981) 437.
- [20] M. Harada and K. Yamawaki, Phys. Rept. **381**, 1 (2003) [arXiv :hep-ph/0302103].
- [21] M. Harada and K. Yamawaki, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 152001 [arXiv :hep-ph/0105335].
- [22] C. Itzykson and J. M. Drouffe, "STATISTICAL FIELD THEORY. VOL. 1 : FROM BROWNIAN MOTION TO RENORMALIZATION AND LATTICE GAUGE THEORY," *Cambridge, UK : Univ. Pr. (1989) 1-403*
- [23] Y. Hidaka, O. Morimatsu and M. Ohtani, Phys. Rev. D **73**, 036004 (2006) [arXiv :hep-ph/0512375].

- [24] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434.
- [25] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664.
- [26] J. Zinn-Justin, Int. Ser. Monogr. Phys. **113** (2002) 1.
- [27] T. Varin, D. Davesne, M. Oertel, M. Urban, a paraître dans Nuclear Physics A, hep-ph/0611220
- [28] T. Appelquist, H. C. Cheng and B. A. Dobrescu, Phys. Rev. D **64** (2001) 035002 [arXiv :hep-ph/0012100]
- [29] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43** (1993) 209
- [30] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Nucl. Phys. B **537** (1999) 47
- [31] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Phys. Lett. B **436** (1998) 55
- [32] T. Varin, J. Welzel, A. Deandrea and D. Davesne, Phys. Rev. D **74** (2006) 121702
- [33] G. Chanfray, “Mésons dans la matière hadronique dense et chaude”, Ecole Joliot-Curie (1998)
- [34] H. Leutwyler, hep-ph/9409422
- [35] J. C. Collins, “The Renormalization Group and the Operator Product Expansion,” *Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1984) 380p*
- [36] B. R. Holstein, Chiral Perturbation Theory : A Primer, arXiv :hep-ph/9510344
- [37] U. Mosel, “Symmetries and Quarks”, Springer (1999)
- [38] W. I. Weisberger, Phys. Rev. D **24** (1981) 1617.
- [39] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, “Dynamics of the Standard Model,” Cambridge Monographs, 1992
- [40] C. Itzykson and J. B. Zuber,
- [41] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations”
- [42] S. Weinberg, “The quantum theory of fields. Vol. 2 : Modern applications”
- [43] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43** (1993) 209.
- [44] S. k. Ma, Rev. Mod. Phys. **45** (1973) 589.
- [45] M. Urban, M. Buballa and J. Wambach, Nucl. Phys. A **697** (2002) 338 [arXiv :hep-ph/0102260].
- [46] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, CERN-TH-98-355
- [47] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Nucl. Phys. B **537** (1999) 47 [arXiv :hep-ph/9806292].
- [48] J. F. Oliver, arXiv :hep-ph/0403095.